

Frisch : Introduction à la géométrie
analytique complexe.
(cours de P. Maisonobe)

Contents

Chapitre :

1	<u>Fonctions holomorphes et fonctions analytiques</u>	p 1
1	Fonctions holomorphes, formule de Cauchy	p 1
2	Fonctions analytiques	p 3
3	Sur certains espaces de Banach	p 4
2	<u>Algèbre locale</u>	p 8
1	Anneaux locaux	p 8
2	Anneaux noethériens.	p 9
3	Topologie I-adique	p 11
4	Anneaux de fractions.	p 13
5	Éléments nilpotents	p 16
3	<u>Les faisceaux</u>	p 19
1	Préfaisceau et faisceau	p 19
2	Espaces étalés. Faisceau associé à un préfaisc.	p 20
3	Rappels sur les catégories	p 23
4	Constructions sur les faisceaux de <u>A</u> -modules	p 24
5	Image réciproque	p 26
6	Prolongement local d'une section	p 28
7	Suite exacte associée à un sous-esp. loc. fermé	p 29
8	Image directe	p 33
9	Comorphismes, Espaces annelés.	p 35
10	Foncteurs f^* et f_*	p 37
11	Support, Sous-espaces annelés, Annulateur	p 39
4	<u>Le théorème de préparation de Weierstrass</u>	p 41
1	Faisceau des fonctions analytiques	p 41
2	Théorème de préparation	p 41
5	<u>Espaces analytiques</u>	p 46
1	Définitions	

		P
	2 Morphismes d'espaces analytiques.	48
	3 Produits fibrés d'espaces analytiques.	56
	4 Germes de sous-espaces analytiques pointés.	62
6	<u>Morphismes finis</u>	65
	1 Le théorème des morphismes finis	65
	2 Caractère topologique de la finitude	74
7	<u>Faisceaux cohérents</u>	77
	1 Définition et premières propriétés	77
	2 Théorème d'Oka	81

Remarques sur le cours : Introduction
à la géométrie analytique complexe.

(R1) Les notations sont celles de la p19 verso. $\{M_i, \beta_i\}_{i \in I}$ et $\{N_i, \beta'_i\}_{i \in I}$ sont 2 systèmes inductifs indexés sur I , filtrant à droite, et $g = (g_i)_{i \in I}$ $g_i: M_i \rightarrow N_i$ commutent avec les β_i et β'_i .

Alors $\varinjlim g_i: \varinjlim M_i \rightarrow \varinjlim N_i$ est défini grâce à la propriété universelle de la limite inductive.

On a noté $\beta_i: M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ (resp. β'_i) les proj. canoniques.
 $x \mapsto \beta_i(x)$

En effet :

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\beta'_i \circ g_i} & \varinjlim N_i \\ \downarrow & \nearrow \varinjlim g_i & \\ \varinjlim M_i & & \end{array}$$

Les $M_i \xrightarrow{\beta'_i \circ g_i} \varinjlim N_i$ commutent avec les β_i par hyp., donc se factorisent à travers $\varinjlim M_i$ en posant :

$$\boxed{\varinjlim (\beta_i(x_i)) = \beta'_i \circ g_i(x_i) \quad \forall x_i \in M_i} \quad (1)$$

Application: p21 verso

$$\boxed{\varphi_x(\Delta_x) = (\varphi(U)(\Delta))_x}$$

$\varphi: \underline{E} \rightarrow \underline{F}$ est un morphisme de faisceaux et $\varphi_x: \underline{E}_x \rightarrow \underline{F}_x$ est le morphisme induit par φ sur les fibres par passage à la limite inductive, ie $\varphi_x = \varinjlim \varphi(U)$ où $\underline{E}_x = \varinjlim \underline{E}(U)$ et $\underline{F}_x = \varinjlim \underline{F}(U)$

Si $\Delta \in \underline{E}(U)$ et $x \in U$, on a :

$$\varphi_x(\Delta_x) = (\varinjlim \varphi(U))(\Delta_x)$$

$$\varphi_x(\Delta_x) = (\varphi(U)(\Delta))_x \quad \text{d'après (1)}$$

D'où $\{x \in X / (\varphi(U)(\Delta))_x \in \Omega'\} = (\varphi(U)(\Delta))^{-1}(\Omega')$ comme prévu.

R2 Définition 1.6 p20

Un \underline{A} -module est un faisceau de groupes \underline{F} sur X tel que

- 1) $\forall U \in X \quad \underline{F}(U) = \underline{A}(U)$ -module
- 2) Les restrictions $\rho_{UV} : \underline{F}(V) \rightarrow \underline{F}(U)$ sont α_{UV} -linéaires, où $\alpha_{UV} : \underline{A}(V) \rightarrow \underline{A}(U)$ sont les restrictions de \underline{A} .

Le 2) signifie que $\forall x \in \underline{F}(V) \quad \forall a \in \underline{A}(V) \quad \rho_{UV}(a \cdot x) = \alpha_{UV}(a) \rho_{UV}(x)$.

Le 2) permet d'affirmer qu'à chaque fibre \underline{F}_x de \underline{F} est structurée en \underline{A}_x -module. En effet :

(*) " Soit $\{(M_i, \beta_{ji})\}_{i \in I}$ un système inductif ^{de A_i -modules.} et $\{(A_i, \beta'_{ji})\}_{i \in I}$ un système inductif d'anneaux. Supposons, de plus, que toutes les applications β_{ji} soient β'_{ji} -linéaires. Alors :

$$\varinjlim M_i = \varinjlim A_i \text{ - module } "$$

Il suffit d'appliquer (*) avec le syst. inductif $\{(\underline{F}(U), \rho_{UV})\}_{U \in V \subseteq X}$ pour obtenir $\underline{F}_x = \underline{A}_x$ -module.

Provenons (*): On va définir $\dot{a}_i : x_i \doteq \overline{a_i} x_i$ où $a_i \in A_i$ et $x_i \in M_i$, \dot{a}_i désignant la classe de a_i dans $\varinjlim A_i$. Pour pouvoir le faire, il faut vérifier que

$$\begin{cases} \dot{a}_i = \dot{a}_j \\ x_i = x_j \end{cases} \Rightarrow \overline{a_i} x_i = \overline{a_j} x_j$$

C'est facile :

$$\begin{cases} \dot{a}_i = \dot{a}_j \\ x_i = x_j \end{cases} \Rightarrow \exists k \begin{cases} \beta'_{ki}(a_i) = \beta'_{kj}(a_j) \\ \beta_{ki}(x_i) = \beta_{kj}(x_j) \end{cases}$$

$$\text{Or } \beta_{ki}(a_i x_i) = \beta'_{ki}(a_i) \beta_{ki}(x_i) = \beta'_{kj}(a_j) \beta_{kj}(x_j) = \beta_{kj}(a_j x_j)$$

car β_{ji} est β'_{ji} -linéaire

donc, par définition : $\overline{a_i} x_i = \overline{a_j} x_j$
c.q.f.d

R3 5.5 p27

$\beta : X \rightarrow Y$ continue
 \mathcal{F} = faisceau de \underline{A} -module sur Y } $\Rightarrow \beta^{-1}\mathcal{F}$ = faisceau de $\beta^{-1}\underline{A}$ -module sur X

preuve: $\beta^{-1}\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes car \mathcal{F} l'est. Si $U \in X$,

$$\beta^{-1}\mathcal{F}(U) = \{t : U \rightarrow \mathcal{F} \text{ continue} / \pi \circ t = \beta\}$$

$$\beta^{-1}\underline{A}(U) = \{\alpha : U \rightarrow \underline{A} \text{ continue} / \pi \circ \alpha = \beta\}$$

$\forall a \in \beta^{-1}A(U) \quad \forall t \in \beta^{-1}\mathcal{F}(U) \quad \alpha.t: U \rightarrow \mathcal{F}$ est bien

$$x \mapsto \alpha(x).t(x)$$

défini car $\alpha(x) \in A_{\beta(x)}$, $t(x) \in \mathcal{F}_{\beta(x)}$ et $\mathcal{F}_y = A_y$ -module (cf R2) et l'on possède donc un élément $\alpha.t \in \beta^{-1}\mathcal{F}(U)$. Ce produit vérifie les axiomes de module (car ils sont vérifiés fibre à fibre).

(R3) Note (pouvant servir dans l'étude des \mathcal{D} -modules)

Si A et B sont 2 faisceaux de groupes abéliens ou d'anneaux, $\text{Hom}(A, B)$ désigne l'espace des morphismes de faisceaux de A vers B .

Le faisceau $\mathcal{H}\text{om}(A, B)$ est, par définition, le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{H}\text{om}(A, B)(U) = \text{Hom}(A|_U, B|_U)$ (qui est déjà un faisceau), où $A|_U$ (resp $B|_U$) désigne le faisceau restriction de A (resp B) sur U .

Attention:

$$\mathcal{H}\text{om}(A, B)_x \neq \text{Hom}(A_x, B_x) \text{ en général}$$

On a seulement un morphisme

$$\mathcal{H}\text{om}(A, B)_x \longrightarrow \text{Hom}(A_x, B_x)$$

qui est ni injectif, ni surjectif et qui est obtenu par passage à la limite inductive dans $\varphi(U)(U): A(U) \longrightarrow B(U)$, où $\varphi(U): A|_U \longrightarrow B|_U$ désigne un morphisme de faisceaux de germe l'élément de départ dans $\mathcal{H}\text{om}(A, B)_x$.

Proposition: Si A est un faisceau d'anneaux cohérent, on a:

$$\mathcal{H}\text{om}(A, B)_x = \text{Hom}(A_x, B_x)$$

ex: $\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{D}}(M, I)_x = \text{Hom}(M_x, I_x)$ où $M = \mathcal{D}$ -module cohérent (cf. livre de PHAM)

Chap 1.

Fonctions holomorphes et Fonctions analytiques

E ev dim finie ou \mathbb{C}

F Banach ou \mathbb{C} , $L_{\mathbb{C}}(E, F) = \text{appl. } \mathbb{C}\text{-lin. cont de } E \text{ dans } F$

1. Fonctions holomorphes, Formule de Cauchy

$$U \subseteq E \xrightarrow{\beta} F$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(y) = \beta(x) + d\beta_x(y-x) + o(y-x)(y-x) \\ \lim_{y \rightarrow x} \frac{o(y-x)}{\|y-x\|} = 0 \\ d\beta_x \in L_{\mathbb{R}}(E, F) \end{array} \right. \quad \text{différentiable au sens réel}$$

Lemme : $L_{\mathbb{R}}(E, F) = L_{\mathbb{C}}(E, F) \oplus L_{\mathbb{C}}(\bar{E}, F)$ par définition, le produit $\lambda \cdot \bar{x} = \overline{\lambda x}$ dans \bar{E} est :

preuve : $\beta(\bar{x} + i\bar{y}) = \beta_1(\bar{x} + i\bar{y}) + \beta_2(\bar{x} + i\bar{y})$
 $\beta(\bar{x}) + \beta(i\bar{y}) = \beta_1(\bar{x}) + i\beta_1(\bar{y}) + \beta_2(\bar{x}) + i\beta_2(\bar{y})$ (car $i\bar{y}$ ci-dessus représente le produit dans \bar{E} .)

d'où $\begin{cases} i\beta(i\bar{y}) = -\beta_1(\bar{y}) + \beta_2(\bar{y}) \\ \beta(\bar{y}) = \beta_1(\bar{y}) + \beta_2(\bar{y}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1(\bar{y}) = \frac{1}{2}(\beta(\bar{y}) - i\beta(i\bar{y})) \\ \beta_2(\bar{y}) = \frac{1}{2}(\beta(\bar{y}) + i\beta(i\bar{y})) \end{cases}$

Ils annulent.

Définition : Soit $\beta : U \subseteq E \rightarrow F$. On dit que β est holomorphe ^{sur U à $\forall x \in U$, β} ~~est~~ ~~différentiable~~ ~~en~~ x au sens réel et si $d\beta_x \in L_{\mathbb{C}}(E, F)$, $\forall x \in U$

$$E = \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$$

$$(\vec{e}_1, i\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, i\vec{e}_n)$$

$$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$$

$$d\beta = \sum \frac{\partial \beta}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial \beta}{\partial y_i} dy_i$$

$$z_i = x_i + iy_i$$

Par le lemme, $dx_i = \frac{1}{2}(dz_i + d\bar{z}_i)$, puisque $\left\{ \begin{array}{l} dz_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = z_1 \\ d\bar{z}_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \bar{z}_1 \end{array} \right.$

De même $dy_i = \frac{1}{2i}(dz_i - d\bar{z}_i)$

Donc $df = \sum \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) dz_k + \left(\frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) d\bar{z}_k$

$$df = \sum \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) dz_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) d\bar{z}_k$$

Proposition : Soit f de classe C^1 sur U . f est holomorphe sur U si
 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} + i \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0$

Théorème : U ouvert de \mathbb{C}^n

$a \in U \quad a = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)$

γ_k courbe d'indice 1 autour de a_k / $\prod \gamma_k \subset U$ (ensembliste)

f holomorphe dans U

$$f(a) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_{\prod \gamma_k} \frac{f(z)}{(z_1 - a_1) \dots (z_n - a_n)} dz_1 \dots dz_n$$

preuve : Récurrence sur n .

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z_1 - a_1) \dots (z_n - a_n)} dz_1 \dots dz_n = \int_{\prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k} \frac{1}{(z_1 - a_1) \dots (z_{n-1} - a_{n-1})} dz_1 \dots dz_{n-1} \underbrace{\int_{\gamma_n} \frac{f(z) dz_n}{z_n - a_n}}_{i2\pi \cdot f(z_1, \dots, z_{n-1}, a_n)}$$

$$= i2\pi \int_{\prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, a_n)}{(z_1 - a_1) \dots (z_{n-1} - a_{n-1})} dz_1 \dots dz_{n-1}$$

$i2\pi \cdot f(z_1, \dots, z_{n-1}, a_n)$

d'après Cauchy
à 1 variable

QFD

Réciproque : Si $\begin{cases} f(z) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z} dz \\ \forall z \in V \subset U, V \text{ disjoint de } \gamma \end{cases}$ (not. abrégées)

Alors f est holomorphe sur V .

preuve : Dérivons le signe somme
 vérifions les équations de Cauchy $\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$

Corollaire : Formule de la moyenne

$$\gamma_R = D(a_R, p_R)$$

$$\gamma = \Pi \gamma_R \subset U \subset \mathbb{C} \quad \beta(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} \beta(a_1 + p_1 e^{i\theta_1}, \dots, a_n + p_n e^{i\theta_n}) d\theta_1 \dots d\theta_n$$

~~$\forall f \in \mathcal{O}(U)$~~

$\forall f$ holomorphe sur U

Notation : $\|\beta\|_A = \sup_{a \in A} \|\beta(a)\|$, où $\beta: A \rightarrow F$ est bornée sur $A \subset E$.

Soit

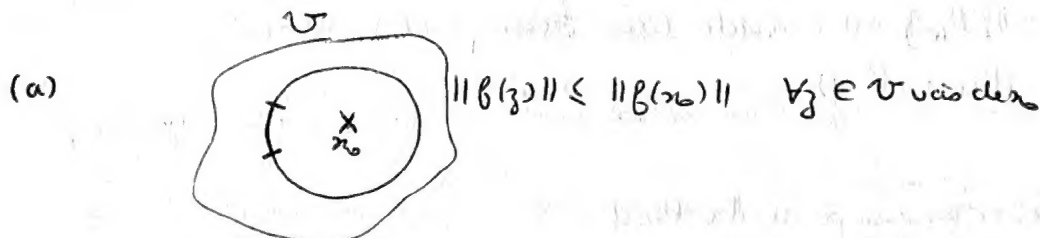
Principe du Maximum : $\beta: U \rightarrow F$ holomorphe (a) si β admet un maximum local en x_0 , alors $\|\beta\|$ est constante au voisinage de x_0 (si $F = \mathbb{C}$, la fonction est elle-même constante.)

(b) K compact de U $\exists x_0 \in \partial K$ $\|\beta\|_K = \|\beta(x_0)\|$

(c) $E = E' \times E''$

$K = K' \times K''$ produit de 2 compacts, inclus dans U

$\exists x'_0, x''_0 \in \partial K' \times \partial K''$ $\beta(x'_0, x''_0) = \|\beta\|_K$



~~(b)~~ Si $F = \mathbb{C}$, $\|\beta(z)\| = \text{cte}$;

~~$\|\beta\| = \text{cte sur } V_0 \Rightarrow \beta = f(z) \text{ sur } V_0$?~~

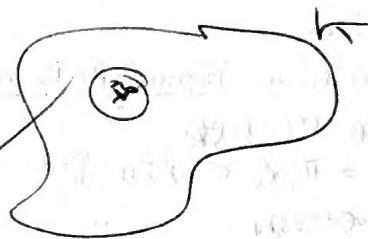
~~$\beta(z) = \beta(0) + \lambda z + \varepsilon(z)z$~~

$$\beta(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\beta(z) dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\beta(0) dz}{z} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{e^{i\theta(z)} - 1}{z} dz = 0$$

$$\beta(z) = \beta(0) e^{i\theta(z)}$$

partie réelle $\Rightarrow \theta(z) = 0 \quad \forall z$.

b) Si $F = \mathbb{C}$, et si f atteint son max en $x_0 \in \mathring{K}$,
 f est constante sur un voisinage de x_0 donc,
 d'après le Th. de prolongement analytique,
 $f = \text{cte}$ sur \tilde{K} (où \tilde{K} ~~composante~~ ^{composante} ~~connexe~~ ^{connexe} de K)



Sinon, si f ~~est~~ atteint son max en
 $x_0 \in \partial K$

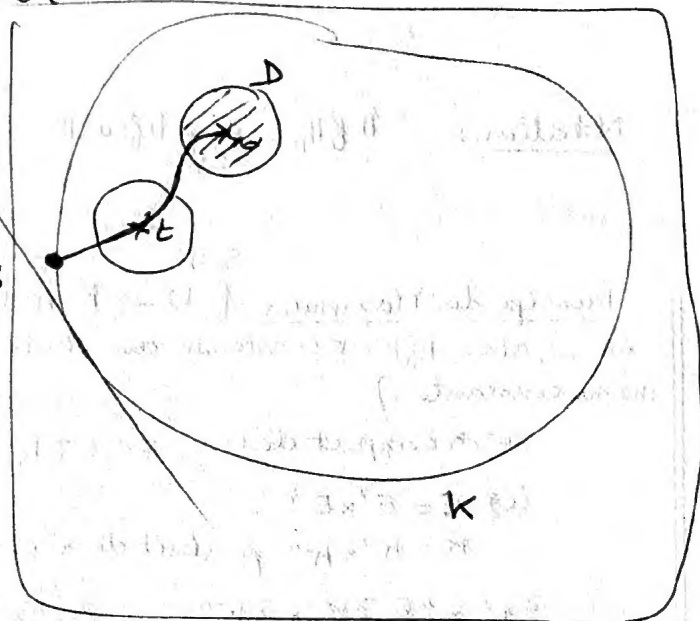
$$f(n) = \|f\|_K \quad \forall n \in D$$

γ chemin de x_0 à ∂K

$$\Lambda = \{t \in [0, 1] / \|f(\gamma(t))\| = \|f\|_K \quad \forall t \in [0, t]\} \neq \emptyset$$

fermé

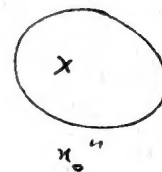
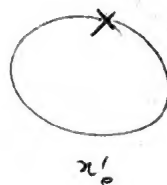
Λ ~~est~~ ouvert car si $t \in \Lambda$,



b) $\{n / \|f(n)\| = \|f\|_K\}$ est non vide (car K compact), fermé, et
 ouvert ~~puisque~~ d'après le a).

c) $\|f\|_K$ est atteint en un point du bord

$$\begin{cases} \|f\|_K = \|f(x'_0, x''_0)\| \\ x'_0 \in \partial K' \text{ et } x''_0 \in K'', \text{ par ex.} \end{cases}$$



$$\text{car } \partial(K' \times K'') = (\partial K' \times K'') \cup (K' \times \partial K'')$$

$f(x'_0, n)$ est anal. sur un vois de K'' , donc atteint son maximum en un
 point de $\partial K''$, disons on $y''_0 \in \partial K''$. Ainsi:

$$\|f(x'_0, n)\|_K = \|f(x'_0, y''_0)\|$$

$$\forall n \in \Omega \quad \|f(x'_0, n)\|_K \geq \|f\|_K = \|f(x'_0, x''_0)\| \geq \|f(x'_0, y''_0)\|$$

\Downarrow

$$\boxed{\|f\|_K = \|f(x'_0, y''_0)\|}$$

Résumé : Si E et F sont 2 Banachs, E de dimension finie, et si U est un ouvert de E , on dit que $f: U \rightarrow F$ est holomorphe si

- 1) f est de classe C^1
- 2) $df(u) \in L_{\mathbb{C}}(E, F)$

On possède alors les 2 outils :

- ① Théorème de Cauchy :
$$f(z) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_n} \frac{f(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 - z_1) \dots (z_n - z_n)} dz_1 \dots dz_n$$
- ② Principe du maximum.

2. Fonctions analytiques

Définition : Un polynôme homogène de degré k est une application $p: E \rightarrow F$ telle que $p = P \circ \delta$ où $P: E^k \rightarrow F$ est une appl. multilinéaire et où $\delta: E \rightarrow E^k$ désigne l'appl. diagonale $\delta(x) = (x, \dots, x)$.

ex: $p: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ correspond à $P: (\mathbb{C}^2)^4 \rightarrow \mathbb{C}$
 $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^3$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \alpha_1 \beta_2 \gamma_2 \delta_2$
 (où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$, etc...)

Lemme : Si $p: E \rightarrow F$ est un polynôme homogène de degré k , il existe une et une seule application multilinéaire symétrique $P: E^k \rightarrow F$ telle que $p = P \circ \delta$.

Définition : P s'appelle alors l'application mult. sym. associée à $p: E \rightarrow F$

preuve: Si P n'est pas symétrique, on prend $\tilde{P} = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \frac{1}{k!} P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$
 de sorte que $\tilde{P} \circ \delta = P \circ \delta = p$.

Unicité : Posons $\Delta_x f(y) = \frac{1}{2} (f(y+x) - f(y-x))$

On a :

$$(\Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_k}) P \circ \delta = k! P(x_1, \dots, x_k) (= \text{appl. constante}) \quad (1)$$

ce qui prouve l'unicité, puisqu'en tenant compte de (1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} P \text{ symétrique} \\ P \circ \delta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P = 0$$

Montrons donc (1) :

$$\begin{aligned} \Delta_{x_k} (P \circ \delta)(y) &= \Delta_{x_k} P(y, \dots, y) = \frac{1}{2} (P(x_k + y, \dots, y) - P(y - x_k, \dots, y)) \\ &= \frac{1}{2} (P(x_k + y, \dots, x_k + y) - P(y - x_k, \dots, y - x_k)) \\ &= k P(y, \dots, y, x_k) + \dots \quad (\text{par linéarité}) \\ &\quad \text{polynôme de degré } k-1 \text{ en } y \quad \text{poly. de deg } \leq k-2 \end{aligned}$$

Par récurrence sur k , on obtient :

$$\Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_k} (P \circ \delta)(y) = k! P(x_1, \dots, x_k), \text{ puisque } \Delta_x f = 0 \text{ si } f = \text{cte.}$$

CFP

Proposition (écriture d'un polynôme homogène)

L'application $p: \mathbb{C}^n \rightarrow F$ est un polynôme homogène de degré k si il s'écrit

$$p(x) = \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = k} a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$$

De plus, cette écriture est unique.

preuve:

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ $p(x) = P(\sum x_i e_i, \dots, \sum x_i e_i)$ et P est n -linéaire, donc:

$$p(x) = \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = k} a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$$

L'unicité se montre par dérivation, et récurrence.

CQFD

Définition: Soit $p: E \rightarrow F$ un polynôme homogène de degré k . On définit la norme $\|p\| = \|\tilde{P}\|$ où \tilde{P} désigne l'appl. multilinéaire symétrique correspondant à p (ie. vérifiant $p = \tilde{P} \circ \delta$)

Ainsi : $\|p\| = \|\tilde{P}\| = \sup_{\|e_i\| \leq 1} \|P(e_1, \dots, e_k)\|$

On obtient $\|p(x)\| = \|\tilde{P}(x, \dots, x)\| \leq \|\tilde{P}\| \|x\|^k$, où $\|p(x)\|$ désigne la norme nouvelle de F , donc:

$\forall x \in E \quad \forall p$ polyn. hom. de deg. k

$$\|p(x)\| \leq \|p\| \|x\|^k$$

Remarque: Tout polynôme homogène de degré k est isomorphe.

En effet, $p: E \rightarrow F$ est de classe C^1 sur E puisque

$\forall h \in E \quad \forall x \in E \quad dp(x)(h) = k P(x, \dots, x, h) \quad (dp(x) \in \mathcal{L}(E, F))$ donc

Notons $dp: E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$

$$x \mapsto dp(x)$$

$dp(x)$ est un polynôme homogène de degré $k-1$ de E dans $\mathcal{L}(E, F)$

puisque $dp(x) = S \circ \delta(x)$ où $S: E^{k-1} \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est

$$(e_1, \dots, e_{k-1}) \mapsto k P(e_1, \dots, e_{k-1}, \cdot)$$

une appl. multilinéaire.

Enfin, on a la formule:

$$\|dp\| \leq k \|p\|$$

puisque: S est mult. symétrique dès que P l'est, alors:

$$\begin{aligned} \|dp\| &\doteq \|S\| = \sup_{\|e_1\|, \dots, \|e_{k-1}\| \leq 1} \|k P(e_1, \dots, e_{k-1}, \cdot)\| \leq \sup_{\substack{\mathcal{L}(E, F) \\ \|e_1\|, \dots, \|e_{k-1}\| \leq 1 \\ \text{et } \|h\| \leq 1}} \|k P(e_1, \dots, e_{k-1}, h)\| \\ &= k \|p\| \end{aligned}$$

Définition : U ouvert de E ; $f: U \rightarrow F$ et $a \in U$.

On dit que f est analytique en a s'il existe $r > 0$ et des polynômes homogènes f_k de degré k , $k \in \mathbb{N}$, tels que

$$1) \sum_{k \geq 0} \|f_k\| r^k < \infty$$

$$2) f(a+x) = \sum_{k \geq 0} f_k(x) \quad (\text{pour } x \in E \text{ assez petits})$$

f est dite analytique sur U si f est analytique en tout pt de U .

NB : la condition 1) implique la convergence normale de la série 2) pour $\|x\| \leq r$, puisque $\sum_{k \geq 0} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k \geq 0} \|f_k\| r^k < \infty$.

Proposition : f est analytique en $a \Leftrightarrow f$ est holomorphe au voisinage de a .

preuve :

(\Leftarrow) Th. de Cauchy, comme dans le cas $n=1$.

(\Rightarrow) (cf conditions banachiques) f est de classe C^1 en a car 2) montre que f dérivable au voisinage de a et $f'(a+x) = \sum_{k \geq 0} df_k(x)$. En effet, $\sum_{k \geq 0} k \|f_k\| r^k < \infty$ donc $\sum_{k \geq 0} \|df_k\| r^k < \infty$.

(Rappel : Soit $f_n: U \rightarrow F$ dérivables. Si $\sum f'_n(x)$ converge normalement vers f' sur U et si il existe $x_0 \in U$ tel que $\sum f_n(x_0)$ converge, alors la série $\sum f_n$ est uniformément convergente de somme $f(x)$, $f(x)$ est dérivable et $f'(x) = \sum f'_n(x)$ - cf "Analyse", Gauthier, coll. U)

On vérifie alors que $df(a+x) = \sum_{k \geq 0} df_k(x)$ est bien \mathbb{C} -linéaire ($df(a+x)$ est C^1).

CQFD

3. Sur certains espaces de Banach

On note : $U \subseteq E$ E, F e.v. $\dim E < \infty$ et F Banach

$\underline{C}(U, F)$ = fonctions continues de U dans F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

$\underline{O}(U, F)$ = fonctions holomorphes de U dans F , muni de la topologie induite par $\underline{C}(U, F)$

Proposition 3.1 : $\underline{O}(U, F)$ est fermé dans $\underline{C}(U, F)$

preuve : Soit $(f_n)_n$ une suite convergente vers $f \in \underline{C}(U, F)$ telle que $f_n \in \underline{O}(U, F)$. On doit montrer que f est analytique. Le problème est local.



$$f_n(y) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{z-y} dz$$

$\frac{f_n(z)}{z-y}$ converge uniformément vers $\frac{f(z)}{z-y}$ pour $z \in \gamma$ et y fixé,
donc $f_n(y) \rightarrow \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-y} dz = f(y) \Rightarrow f$ analytique en a .

CQFD

Remarques:

Notons $\mathcal{C}(U) = \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ et $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}(U, \mathbb{C})$.

Si K est compact, $\mathcal{C}(K, F)$ et $\mathcal{C}(K)$ sont des Banach (ie des espaces complets)

Posez $\mathcal{B}(K, F) = \{f \in \mathcal{C}(K, F) / f \text{ holomorphe sur } \overset{\circ}{K}\}$. Alors on a facilement:

Proposition 3.2: $\mathcal{B}(K, F)$ est fermé dans $\mathcal{C}(K, F)$

Proposition 3.3: Soient $K =$ compact convexe d'intérieur non vide de E
 $f \in \mathcal{B}(K, F)$

Alors:

$\forall \epsilon > 0 \exists U$ voisinage ouvert de $K \exists g \in \mathcal{O}(U, F) / \|f - g\|_K < \epsilon$

(En d'autres termes $\mathcal{O}(K) = \varinjlim_{K \subset U \subset E} \mathcal{O}(U) = \mathcal{B}(K, F)$)



preuve:

a) Dans \mathbb{C} ,



Prenons $K =$ disque $\overline{D}(0, 1)$ de \mathbb{C} . Comme f est uniformément continue sur K ,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$\text{Si } y = tx, \quad |1-t| \|x\| \leq \eta \Leftrightarrow |1-t| \leq \frac{\eta}{\sup_{x \in K} \|x\|}. \text{ Ainsi}$$

$$|1-t| < \frac{\eta}{\sup_{x \in K} \|x\|} \Rightarrow |f(x) - f(tx)| \leq \epsilon$$

($tx \in K$ dès que $0, x \in K$ pour $t \in]0, 1[$ car K convexe)

On peut choisir $0 < t < 1$ (prendre $t = 1 - \frac{\eta}{\sup_{x \in K} \|x\|}$ où $\eta < \sup_K \|x\|$)

b) Cas général :

$K \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in K$.

Soit $h_t: K \rightarrow E$ l'homothétie de centre a et de rapport t
 $x \mapsto a + t(x-a)$ de E , où $t > 1$.

$h_t(K)$ est un voisinage de K et $U \doteq \overline{h_t(K)}$ est tel que $f_t \doteq f \circ h_t^{-1}$ soit holomorphe sur U (car h_t^{-1} est holomorphe sur U et $h_t^{-1}(h_t(K))$ est ouvert dans K , donc $f \circ h_t^{-1}$ est la composée de 2 fct's holomorphes).
 De plus, l'uniforme continuité de f sur K , comme dans le a), donne :

$$\lim_{t \rightarrow 1} \|f_t - f\|_K = 0$$

CPFD

peut être fausse

Proposition 3.4: E', E'' = espaces vectoriels de dimension finie
 K', K'' = convexes compacts d'intérieur non vide, $K' \subset E'$ et $K'' \subset E''$

$$\underline{B}(K' \times K'') \xrightarrow{\quad} \underline{B}(K', B(K'')) \quad \text{est une isométrie (ie une} \\ f \longmapsto \{x' \mapsto f(x', \cdot)\})$$

application linéaire qui conserve la norme)

preuve: * $B(K'') = \text{Banach}$ car K'' compact

* $\{B(x', \cdot) \in B(K'') \mid \text{car } f(x', x'') \text{ holomorphe sur } \overline{K' \times K''} = \overset{\circ}{K'} \times \overset{\circ}{K''}\}$
 si $x' \in \overset{\circ}{K'}$

Si $x' \in \partial K'$, $x'_n \rightarrow x'$, $x'_n \in \overset{\circ}{K'}$, $f(x'_n, x'') = g_n(x'')$

Comme f uniformément continue sur K , $g_n(x'')$ converge uniformément sur K'' vers $f(x', x'')$, et comme $\underline{B}(K'')$ est un Banach $f(x', \cdot) \in \underline{B}(K'')$

* $\tilde{f}: K' \rightarrow B(K'')$ est continue car f est unif. continue sur K .

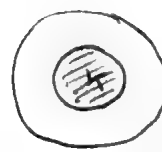
* $\tilde{f}: \overset{\circ}{K'} \rightarrow B(K'')$ est analytique: ?

$$f(x', x'') = f(x'_0, x'') + \underbrace{D_1 f(x'_0, x'')}(x' - x'_0) + \|x' - x'_0\| \varepsilon(x' - x'_0, x'') \\ \text{différentielle de la fct holomorphe } f(x', x'') \\ \text{donc } \mathbb{C}\text{-linéaire}$$

$$* \|\tilde{f}\| = \sup_{x' \in K'} \|B(x', \cdot)\| = \sup_{(x', x'') \in K' \times K'} \|B(x', x'')\| \quad (\text{car } \sup_x \sup_y f(x, y) = \sup_{x, y} f(x, y))$$

cpf)

(*) Une telle suite existe car K' convexe compacts d'int. non vide. Cex:



K
une telle suite
n'existe pas

Proposition 3.5:

L, K compacts de $\mathbb{C} / L \subset K^\circ$ et $L \neq \emptyset$

Alors l'opérateur de restriction $\rho: B(K) \rightarrow B(L)$ est un opérateur compact.

preuve:

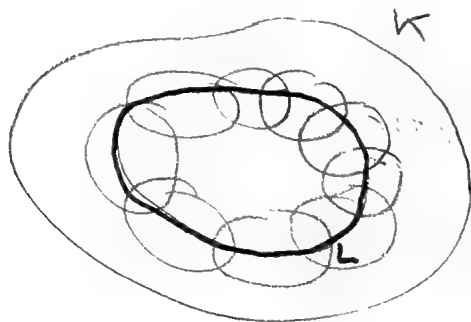
$B(K)$ = fermé dans $C(K)$ et $C(K)$ Banach $\Rightarrow B(K)$ banach.

Soit B_K la boule unité de $B(K)$, alors $\rho(B_K)$ est relativement compact dans $C(L)$?

On utilise le Th. d'Ascoli:

- * $\rho(B_K)$ est simplement borné i.e. $\sup_{\substack{f \in B_K \\ x \in L}} |\rho(f)(x)| \leq 1$ (pour tout $x \in L$)
- * $\rho(B_K)$ équicontinue en tout point i.e.:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x, x' \in L, |x - x'| < \eta \Rightarrow \forall f \in B_K \quad |\rho(f)(x) - \rho(f)(x')| < \varepsilon$
 Il suffit de montrer que $\exists C > 0 \quad \|\rho f\|_L \leq C$



$$\left. \begin{array}{l} K \subset \bigcup_{i \in J} K_i \\ L \subset \bigcup_{i \in J} L_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} L_i \subset K_i^\circ \\ \text{c'est possible} \\ \text{car } L \subset K^\circ \end{array}$$

Majorer $\|\rho f\|_{L_i}$

$$\rho(f) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \gamma} d\gamma_1 \dots d\gamma_n$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z_i}(z) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_{\gamma} - \frac{f(z)}{(z - \gamma)(z - \gamma_i)} d\gamma_1 \dots d\gamma_n$$

On nomme γ = bord de K_i
 $(d(L_i, \{K_i^\circ\}) > 0)$



$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1, \dots, \rho_n = \text{rayons de } K_i \\ \delta_1, \dots, \delta_n = \text{différences des rayons} \\ \text{de } K_i \text{ et } L_i. \end{array} \right.$

Alors

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial z_i}(z) \right| \leq \frac{\|f\|_{K_i}}{\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_n} \rho_1 \dots \rho_n$$

$$\sup_{L_i} \left| \frac{\partial \rho}{\partial z_i}(z) \right| \leq \frac{\|f\|_{K_i}}{\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_n} \rho_1 \dots \rho_n = C_i$$

$$(1) \quad \|\rho f\|_{L_j} \leq \sup_{i \in J} \left\| \frac{\partial \rho}{\partial z_i} \right\|_{L_j} \quad \text{en prenant } (\|x_1, \dots, x_n\| = \sum \|x_i\| \text{ norme dans } E)$$

$$df = \sum \frac{\partial \rho}{\partial z_i} dz_i \Rightarrow (1)$$

\Downarrow

$$\|\rho f\|_L \leq \sup_{\substack{i \in J \\ f \in B_K}} \|\rho f\|_{L_j}$$

3. Rappels sur les Banach

F', F'' Banachs

* $V = \text{Isom}(F', F'')$ ouvert de $\mathcal{L}(F', F'')$

$\text{Isom}(F', F'') = \text{isomorphismes de } F' \rightarrow F''$
appl. lin. bij. bicontinue

$$V \xrightarrow{\theta} \mathcal{L}(F'', F') \text{ est différentiable } C^1$$

$$\varphi \mapsto \varphi^{-1}$$

$$d\theta(\varphi)(h) = -\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi^{-1}$$

$$d\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(F', F''), \mathcal{L}(F'', F'))$$

* U ouvert. Soit: $U \xrightarrow{\gamma} \mathcal{L}(F', F'')$ analytique,
 $s \mapsto \gamma_s$

et $\forall s \in U$ γ_s est un isomorphisme. On peut définir l'application

$$U \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathcal{L}(F'', F')$$

$$s \mapsto \gamma_s^{-1}$$

$d\tilde{\gamma}(s)(h) = -\gamma_s^{-1} \circ (d\gamma_s)_0(h) \circ \gamma_s^{-1}$ est \mathbb{C} -linéaire et $\tilde{\gamma}$ est C^1 sur U , donc
 $\tilde{\gamma}$ est analytique.

Chapitre 2

Algèbre locale

Tous les anneaux seront commutatifs et unitaires.

1. Anneaux locaux

Proposition 1.1: Soit A un anneau. Les 2 prop. suiv. sont \sim :

- (1) A possède un seul idéal maximal.
- (2) les éléments non inversibles de A forment un idéal.

preuve:

Notons \mathcal{M} l'ensemble des éléments non inversibles de A .

(1) \Rightarrow (2): Notons \mathfrak{J} l'unique idéal maximal de A . Alors $\mathfrak{J} \subset \mathcal{M}$
 $\forall x \in \mathcal{M} \quad Ax \neq A$ donc (cf Th. de Zorn) $Ax \subset \mathfrak{J}$, donc $\mathcal{M} \subset \mathfrak{J}$

Finalement $\mathfrak{J} = \mathcal{M}$

(2) \Rightarrow (1): Tout idéal propre de A est contenu dans l'ensemble des éléments non inversibles.

CQFD

Définition 1.2: Un anneau local est un anneau qui vérifie l'une des 2 conditions \sim de la proposition 1.1. On notera \mathcal{M} l'unique idéal maximal de A . On dit que A/\mathcal{M} est le corps résiduel de A .

exemple: L'anneau $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ des germes de fonctions analytiques en 0 est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M} = (x_1, \dots, x_n)$ puisque l'ensemble des éléments non inversibles $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ est égal à l'ensemble des $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ tels que $f(0) = 0$, forme un idéal.

Fixons $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{M}$. Alors $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} / (f_1, \dots, f_p) \neq 0$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M} / (f_1, \dots, f_p)$.

En effet, si $m \in \mathcal{M} / (f_1, \dots, f_p)$, m n'est pas inversible sinon $mg \equiv 1 \pmod{(f_1, \dots, f_p)}$ ce qui est absurde puisque $m(0) = f_i(0) = 0 \quad \forall i$.

Si $m \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} / (f_1, \dots, f_p)$ n'appartient pas à $\mathcal{M} / (f_1, \dots, f_p)$, on montre que

m est inversible : $m(0) \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{m} \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow m \cdot \frac{1}{m} = 1$
 dans $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} / (b_1, \dots, b_p)$

1.3 Lemme de Nakayama :

A = anneau local d'idéal maximal m

$E = A$ -module de type fini

On a l'une des versions équivalentes suivantes :

(1) $mE = E \Rightarrow E = 0$

(2) $E \otimes_A A/m = 0 \Rightarrow E = 0$

(3) $E/mE = 0 \Rightarrow E = 0$

preuve :

Montrons (1) : Soit (x_1, \dots, x_n) un système générateur de E

$$x_1 \in mE = mE \Rightarrow x_1 = \sum_{i \neq 1} m_i x_i \Rightarrow (1 - m_1) x_1 = \sum_{i \neq 1} m_i x_i$$

Gr $1 - m_1$ est inversible (En effet, m non inversible $\Rightarrow 1 - m$ inversible sinon $1 = m + n$ où n non inversible, ce qui est absurde car l'anneau étant local, l'ensemble des él. non inversibles forment un idéal propre de A)

Ainsi (x_2, \dots, x_n) est encore un système générateur de E . Par récurrence finie, on obtient : (x_n) engendre E . Mais on recommence :

$$x_n = m x_n \quad m \in m \Rightarrow (1 - m) x_n = 0 \quad \text{où } 1 - m \text{ inversible} \\ \Rightarrow x_n = 0$$

Donc $E = 0$.

(1) \Leftrightarrow (3) trivial

(1) \Leftrightarrow (2) Il s'agit de vérifier l'équivalence

$$mE = E \Leftrightarrow E \otimes_A A/m = 0$$

On a la suite exacte de A -modules :

$$0 \rightarrow m \xrightarrow{i} A \rightarrow A/m \rightarrow 0$$

Le foncteur \otimes est exact à droite, donc, en notant $i_* = \text{Id}_E \otimes i$:

$$\begin{array}{ccccccc} E \otimes m & \xrightarrow{i_*} & E \otimes A & \longrightarrow & E \otimes A/m & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow e \otimes m & \xrightarrow{\quad} & \downarrow e \otimes m & & & & \\ & \searrow & \downarrow \text{me} & & & & \\ & & E & & & & \end{array} \quad (*)$$

On a $\text{Dm } i_* = \mathcal{M}E$, donc

$$E \otimes A/\mathcal{M} = E/\mathcal{M}E$$

CQFD

Remarque : D'après la suite (*), on a :

$$\{x_i \otimes i\}_{1 \leq i \leq n} \text{ engendrent } E \otimes A/\mathcal{M} \iff \{x_i\} \text{ engendrent } E/\mathcal{M}E$$

Le lemme de Nakayama est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 1.4 :

A = anneau local d'idéal maximal \mathcal{M}

E = A -module de type fini

Si $x_1, \dots, x_n \in E$ sont tels que $x_1 \otimes i, \dots, x_n \otimes i$ engendrent $E \otimes A/\mathcal{M}$, alors (x_1, \dots, x_n) est un système de générateurs de E .

preuve : On pose $Q = \frac{E}{(x_1, \dots, x_n)}$ et $u: E^n \longrightarrow E$
 $(1, 0, \dots, 0) \longmapsto u_1$

La suite exacte $E^n \xrightarrow{u} E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ donne la suite exacte suivante par tensorisation :

$$E^n \otimes A/\mathcal{M} \xrightarrow{u_*} E \otimes A/\mathcal{M} \longrightarrow \underbrace{Q \otimes A/\mathcal{M}}_{=0} \longrightarrow 0$$

$$\begin{cases} u_*((1, 0, \dots, 0) \otimes i) = x_1 \otimes i \\ \dots \\ u_*((0, \dots, 1) \otimes i) = x_n \otimes i \end{cases}$$

Donc u_* est surjective par hypothèse. Mais alors $Q \otimes A/\mathcal{M} = 0$ et le lemme de Nakayama donne $Q = 0 \iff E = (x_1, \dots, x_n)$.

CQFD

2. Anneaux noethériens

Définition 2.1 : Un A -module M est dit noethérien si l'une des assertions équivalentes suivantes est vraie :

- (1) Toute suite croissante de sous-modules est stationnaire.
- (2) Tout sous-module de M est de type fini.
- (3) Toute famille non vide de sous-modules de M possède un élément maximal.

(1) \Rightarrow (2) $(x_0), (x_0, x_1), \dots, (x_0, x_1, \dots, x_n), \dots$ est une suite stationnaire, donc (x_0, \dots, x_n) engendrent le sous-module N pour n grand.

(2) \Rightarrow (1) $M_n \subset M_{n+1}$ et $M' = \bigcup M_n$ est un sous-module de M , donc de type fini. Soit (x_1, \dots, x_n) un système générateur de M' et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_1, \dots, x_n \in M_{n_0}$. Alors $n \geq n_0 \Rightarrow M_n = M_{n_0} = M'$.

(1) \Leftrightarrow (3) lemme: Tensemble ordonné. Alors:

Toute famille non vide d'éléments de T admet un élément maximal $\} \Leftrightarrow \{$ Toute suite croissante $\{t_n\}_{n \geq 0}$ d'él. de T est stationnaire.

preuve du lemme:

(\Rightarrow) Si $\{t_n\}_n$ est une suite croissante, $\{t_n\}_n \subset T$ et $\{t_n\}_n \neq \emptyset$ donc $\{t_n\}$ possède un él. maximal t_k . Alors $t_n \geq t_k \Rightarrow t_n = t_k$.

(\Leftarrow) SCT $S \neq \emptyset$ S sans élément maximal.

Prendons alors $t_0 \in S$. Il existe $t_1 \in S / t_0 < t_1$, et par récurrence $\exists t_{n+1} \in S / t_n < t_{n+1}$. On obtient alors une suite croissante $\{t_n\}_n$ non stationnaire, ce qui est absurde.

CQFD

Un anneau A est dit noethérien si, considéré comme A -module, c'est un module noethérien; en d'autres termes A est un anneau noethérien ssi il satisfait à la condition de chaîne ascendante: "Toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire". Ainsi, un anneau principal est noethérien.

Proposition 2.2:

A = anneau

M = A -module

M' = sous-module de M

Alors:

M noethérien $\Leftrightarrow M'$ et M/M' noethériens.

preuve:

(\Rightarrow) Soit M noethérien. L'ensemble ordonné des sous-modules de M' (resp. de M/M') est en bijection croissante avec l'ensemble ordonné des sous-modules de M contenus dans M' (resp. contenant M').

(\Leftarrow) Si M' et M/M' sont noethériens, soit $\{F_n\}_{n \geq 0}$ une suite croissante de sous-modules de M .

Comme M' noethérien, il existe $n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow F_n \cap M' = F_{n_0} \cap M'$

Comme M/M , noethérien, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_1 \Rightarrow F_n + M'/M = F_{n_1} + M'/M \Rightarrow F_n + M' = F_{n_1} + M'$$

Alors $n \geq \sup(n_0, n_1) \Rightarrow F_n = F_{n+1}$. Il suffit de voir $F_{n+1} \subset F_n$. Soit $x \in F_{n+1}$.

Comme $F_{n+1} + M' = F_n + M'$, il existe $y \in F_n$ $\exists z', z'' \in M'$ tels que

$x + z' = y + z''$ d'où $x - y = z'' - z' \in F_{n+1} \cap M' = F_n \cap M'$ donc $x - y \in F_n$ d'où $x \in F_n$ car $y \in F_n$. Finalement $F_{n+1} = F_n$.

CQFD

Corollaire 2.3 : Si M et N sont des A -modules noethériens, alors $M \times N$ est un A -module noethérien.

preuve: $M \cong M \times \{0\} \subset M \times N$. $M \times \{0\}$ noethérien et $M \times N / M \times \{0\} \cong N$ noethérien, donc $M \times N$ noethérien d'après la pro. 2.2.

Autre méthode : Soit F un sous-module de $M \times N$, et $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ la proj. canonique. $\pi_1(F)$ est un sous-module de M , donc de type fini. Notons (m_1, \dots, m_p) un syst. générateur de $\pi_1(F)$. Il existe $(m_i, n_i) \in F \subset M \times N$ tels que $\pi_1(m_i, n_i) = m_i$.

$\forall x \in F$ $\pi_1(x) \in \pi_1(F)$ donc $x = \sum \lambda_i (m_i, n_i) = (0, n) \in F \cap N \subset N$ (abus)

Ainsi $F \cap N$ est de type fini. Si $(0, \bar{n}_1), \dots, (0, \bar{n}_s) \in F$ engendrent $F \cap N$ (N identifié à $\{0\} \times N$), on constate que $(m_1, n_1), \dots, (m_p, n_p), (0, \bar{n}_1), \dots, (0, \bar{n}_s)$ engendrent $M \times N$.

CQFD

Corollaire 2.4 :

Soit A un anneau noethérien. Alors :

$$M = A\text{-module noethérien} \Leftrightarrow M \text{ de type fini}$$

preuve:

(\Rightarrow) trivial

(\Leftarrow) M de type fini, donc il existe une surjection linéaire φ :

$$A^p \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0 \quad \text{donc} \quad M \cong A^p / R$$

où $R = \ker \varphi$ est un sous-module de A^p .

A^p est noethérien d'après la Co. 2.3, donc A^p / R est noethérien d'après la Pro. 2.2.

CQFD

2.5 Théorème d'Hilbert : A noethérien $\Rightarrow A[X]$ noethérien

preuve : Soit I un idéal de $A[X]$. Si $P \in A[X]$ et $\deg P = k$, on note $\gamma_k(P)$ le coefficient (dominant) de X^k de P .

Soit $I_k =$ ensemble des coefficients en X^k des polynômes de degré k dans $I = \{ \gamma_k(P) / P \in I \text{ et } \deg P = k \}$

On a :

$$I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_k \subset \dots \quad (1)$$

(puisque $I_0 \subset I_1$, car $c \in I_0 \Rightarrow cX \in I \Rightarrow c \in I_1$, etc...)

(1) est une suite d'idéaux de A noethérien, $\{I_n\}_n$ est donc stationnaire : $\exists n \in \mathbb{N} \quad k \geq n \Rightarrow I_k = I_n$.

Considérons la famille de polynômes :

$$P_0^{(1)}, \dots, P_0^{(l_0)}; \dots; P_n^{(1)}, \dots, P_n^{(l_n)} \quad (F')$$

tel que :

$$\begin{cases} P_k^j \in I \text{ et } \deg P_k^j = k & \forall k, j \\ (\gamma_k(P_k^1), \dots, \gamma_k(P_k^{(l_k)})) = I_k & \forall k \end{cases}$$

Alors (F') engendre I :

(F') engendre les éléments de I de degré 0.

Si (F') engendre les éléments de degré $k < n$ de I et si $P \in I$, $\deg P = k+1$, $P = \sum_{j=1}^l \lambda_j P_{k+1}^j$ est de degré k , dans I (cf $c_{k+1} = \gamma_{k+1}(P) \in I_{k+1}$ donc

$$c_{k+1} = \sum \lambda_i \gamma_{k+1}(P_{k+1}^i))$$

Si (F') engendre les éléments de I de degré $k \geq n$, disons pour commencer $k = n$. Soit $P \in I / \deg P = n+1$. Alors $\gamma_{n+1}(P) \in I_{n+1} = I_n$ donc $\exists S \in I$ $\deg S = n$ $\gamma_n(S) = \gamma_{n+1}(P)$. Mais S est engendré par (F') , donc $X.S \in I$, $\deg X.S = n+1$ et $\gamma_{n+1}(X.S) = \gamma_{n+1}(P)$. Donc $S - X.S \in I$ et $\deg(S - X.S) = n$. Par hypothèse de récurrence, $S - X.S =$ combinaison linéaire (dans $A[X]$) d'éléments de (F') .

Le pas général de récurrence est le même.

CQFD

Remarque : Avoir $A[X_1, \dots, X_p]$ est noethérien dès que A l'est.

Corollaire 2.6: Si A est un anneau noethérien, toute A -algèbre de type fini est noethérienne.

preuve: Si L est une A -algèbre de type fini, de système générateur l_1, \dots, l_p , on a un morphisme d'algèbre surjectif

$$\begin{array}{ccc} A[X_1, \dots, X_p] & \xrightarrow{\varphi} & L \longrightarrow 0 \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ X_i & \longmapsto & l_i \end{array}$$

Donc $L \simeq A[X_1, \dots, X_p] / \ker \varphi$ noethérien d'après 2.5 et 2.2.

3. Topologie I-adique.

Soit I un idéal de l'anneau unitaire A , fixé une fois pour toute.

$P \subset A$ est un voisinage de 0 dans A pour la topologie I -adique s'il existe $n > 0$ tel que $I^n \subset P$. Ainsi, $\{a + I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un système fondamental de voisinages de a , et A est un anneau topologique.

Si E est un A -module, on dira que $P \subset E$ est un voisinage de 0 dans E s'il existe $n > 0$ tel que $I^n E \subset P$. Un système fondamental de voisinages de $e \in E$ est $\{e + I^n E\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Si F est un sous-module de E , on peut munir F :

* soit de la topologie I -adique de F ($\rightarrow I^n F$)

* soit de la topologie induite par la top. I -adique de E ($\rightarrow F \cap I^n E$)

On a $I^n F \subset I^n E \cap F$, et on montrera en fait que ces 2 topologies coïncident.

Définition 3.1: Soit E un A -module. Une filtration de E est une suite décroissante de A -modules telle que $E_0 = E$.

$$E_0 = E \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$$

La filtration $\{E_n\}$ de E est bonne si

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad I \cdot E_n \subset E_{n+1}$$

$$2) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow I \cdot E_n = E_{n+1}$$

3.2 Lemme clef: $E = A$ -module

$\{E_n\}_n$ filtration de E telle que E_n de type fini $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$I \cdot E_n \subset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Posons } A' = A \oplus I X \oplus I^2 X^2 \oplus \dots = \bigoplus_{\mathbb{N}} I^k$$

$$E' = E_0 \oplus E_1 X \oplus E_2 X^2 \oplus \dots = \bigoplus_{\mathbb{N}} E_k$$

Alors E' est un A' -module et:

$$E' = A'\text{-module de type fini} \iff \text{la filtration } \{E_n\} \text{ est bonne}$$

preuve: La structure de A' -module de E' est déduite de la multiplication

$$(\sum a_i X^i)(\sum e_j X^j) = \sum_k (\sum_{i+j=k} a_i e_j) X^k$$

et c'est pour cette raison que l'on a adopté la notation polynomiale.

(\Leftarrow) Si la filtration est bonne, soit $n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow IE_n = E_{n+1}$, et soient a_i^k $1 \leq i \leq i(k)$ un système générateur de E_k , où $0 \leq k \leq n_0$.

Alors $\mathcal{F} = \{a_i^k X^k\}_{i,k}$ engendrent E' : ils engendrent $E_j X^i$ pour $j \leq n_0$.

On a $E_{n_0+1} X^{n+1} = IE_{n_0} X^{n+1}$ engendré par les éléments de $(IX) \cdot (E_{n_0} X^n)$ et comme $E_{n_0} X^n$ est engendré par \mathcal{F} , $E_{n_0+1} X^{n+1}$ est engendré par \mathcal{F} . On continue de cette manière.

(\Rightarrow) Soient $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p$ un système générateur de E' . Quitte à prendre toutes les composantes homogènes de ces polynômes, on peut supposer chaque \bar{e}_j homogène, i.e.:

$$\bar{e}_j = e_j X^{n(j)} \text{ où } e_j \in E_{n(j)}$$

Soit $n_0 = \sup_{1 \leq j \leq p} n(j)$. Montrons que $n \geq n_0 \Rightarrow IE_n = E_{n+1}$.

Lemme: $n \geq n_0 \Rightarrow E_n \subset I^{(n-n_0)} E_{n_0}$

$$\forall \beta \in E_n \quad \exists t_R \in A' \quad \beta X^n = \sum_{k=1}^p t_R e_R X^{n(R)}$$

βX^n est homogène, donc on peut supposer que tous les t_R sont homogènes, i.e. $t_R = \alpha_R X^{n-n(R)}$ où $\alpha_R \in I^{n-n(R)}$

Donc:

$$\beta X^n = \left(\sum_{k=1}^p \alpha_R e_R \right) X^n$$

$$\left. \begin{array}{l} e_R \in E_{n(R)} \text{ où } n(R) \leq n_0 \\ \alpha_R \in I^{n-n(R)} = I^{n-n_0+(n_0-n(R))} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_R e_R \in I^{n-n_0} \cdot I^{n_0-n(R)} E_{n(R)}$$

Mais $I^{n_0-n(R)} E_{n(R)} \subset E_{n_0}$ par hypothèse, donc $\beta \in I^{n-n_0} E_{n_0}$.

On a montré que

$$n \geq n_0 \Rightarrow E_n \subset I^{n-n_0} E_{n_0} \quad (1)$$

Le résultat s'en déduit:

Pour $n = n_0 + 1$, (1) donne $E_{n_0+1} \subset IE_{n_0}$ donc $E_{n_0+1} = IE_{n_0}$

Pour $n > n_0 + 1$, (1) donne $E_n \subset I^{n-n_0} E_{n_0} \subset I(I^{n-n_0-1} E_{n_0})$

$\subset E_{n-1}$ par hyp.

$$\text{Donc } E_n \subset IE_{n-1}$$

Q.F.D

exemple: $\{I^n E\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une bonne filtration de E . C'est la filtration triviale de E :

$$\begin{cases} E \supset I E \supset I^2 E \supset \dots \supset I^n E \supset I^{n+1} E \supset \dots \\ \text{et } I \cdot I^n E = I^{n+1} E \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Cette filtration triviale induit sur n'importe quel sous-module F de E la filtration $\{I^n E \cap F\}$, et on a:

3.3 Théorème d'Artin - Rees

A = anneau noethérien

I = idéal de A

E = A -module de type fini

F = sous-module de E

La filtration $\{I^n E \cap F\}$ de F induite par la filtration triviale $\{I^n E\}_n$ de E est une bonne filtration, donc:

$$I(I^n E \cap F) = I^{n+1} E \cap F \quad \text{si } n \geq n_0.$$

preuve: $\{I^n E \cap F\}$ est une filtration de F . Montrons que c'est une bonne filtration: d'après le lemme 3.2, il faut montrer que $\bigoplus I^n E \cap F$ est un $\bigoplus I^n$ -module de type fini.

$\bigoplus I^n E \cap F$ est un sous- $\bigoplus I^n$ -module de $\bigoplus I^n E$. Si $\bigoplus I^n$ était un anneau noethérien, $\bigoplus I^n E$ serait un $\bigoplus I^n$ -module de type fini donc noethérien d'après 2.4 et donc $\bigoplus I^n E \cap F$ serait de type fini.

$\bigoplus I^n$ est bien un anneau noethérien: c'est une A -algèbre engendrée par I donc de type fini, donc noethérienne d'après le co. 2.6. Rappelons que

$$\text{on a} \quad A[i_1, \dots, i_p] \xrightarrow{\varphi} A \oplus IX \oplus I^2 X^2 \oplus \dots \longrightarrow 0$$

$$1 \longmapsto 1$$

$$i_j \longmapsto i_j X$$

où (i_1, \dots, i_p) = syst. générateur de I

Donc

$$A \oplus IX \oplus \dots \simeq A[i_1, \dots, i_p] / \ker \varphi \quad \text{noethérien.}$$

CQFD

NB: On peut prendre la définition boursbakiste suivante: Une A -algèbre de type fini est un quotient $A[X_1, \dots, X_p]/R$.

Corollaire 3.4 : $A =$ anneau noethérien

$E = A$ -module de type fini

$F =$ sous-module de E

les 2 topologies I -adiques sur F sont équivalentes.

preuve :

Notons \mathcal{O}_F la topologie I -adique sur F et \mathcal{O}_E la topologie induite sur F par la topologie I -adique de E .

$I^n F \subset I^n E \cap F$ donc $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{O}_F$

Soit $n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow I(I^{n_0} E \cap F) = I^{n_0+1} E \cap F$. On montre facilement que :

$$I^{n_0+p} E \cap F \subset I^p F \quad \forall p \geq 0$$

C'est vrai pour $p=0$. D'après 3.3 :

$$I^{n_0+p} E \cap F = I^p (\underbrace{I^{n_0} E \cap F}_{CF}) \subset I^p F$$

Donc $\mathcal{O}_F \subset \mathcal{O}_E$.

CQFD

Lemme 3.5 : $A =$ anneau noethérien

$E = A$ -module de type fini

Alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n E = \{ e \in E / \exists i \in \mathbb{Z} \ (1-i)e = 0 \}$$

preuve :

$$\text{Posons } \tilde{E} = \{ e \in E / \exists i \in \mathbb{Z} \ (1-i)e = 0 \}$$

$$e = ie = i^2 e = \dots = i^k e = \dots \text{ donc } \tilde{E} \subset \bigcap I^n E.$$

Inversement, soit $F = \bigcap I^n E$ et $\beta \in F$. La topologie I -adique de F est grossière puisque $IF = F \Rightarrow I^p F = F \quad \forall p \in \mathbb{N}$. Les seuls ouverts de F sont \emptyset et F .

$A_\beta \subset F$, donc A_β possède la topologie grossière. Comme $I\beta = I \cdot (A_\beta)$, $I\beta$ est un voisinage de 0 pour la topologie I -adique de A_β , donc $I\beta = A_\beta$.

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ unitaire} \\ I\beta = A_\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \in I\beta \Rightarrow \beta \in \tilde{E}$$

Finalement $F \subset \tilde{E}$.

CQFD

3.6 Théorème de Krull

A = anneau local noethérien d'idéal maximal \mathfrak{m}

E = A -module de type fini

Alors :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n E = \{0\}$$

preuve : On fait $I = \mathfrak{m}$ dans le lemme précédent :

$$\tilde{E} = \{e \in E / (1-m)e = 0 \text{ } m \in \mathfrak{m}\} = \{0\} \text{ car } m \in \mathfrak{m} \Rightarrow 1-m \text{ inversible.}$$

CQFD

Remarque : Si A est un anneau local noethérien, la topologie I -adique de E est séparée.

4. Anneau des fractions :

A = anneau unitaire commutatif

S = partie multiplicative de A (ie $1 \in S$ et $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$)

On considère la relation :

$$(a, s) \mathcal{R} (a', s') \Leftrightarrow \exists t \in S \quad a s' t = a' s t$$

\mathcal{R} est une relation d'équivalence dans $A \times S$.

On note $S^{-1}A = A \times S / \mathcal{R}$ et $\frac{a}{s}$ la classe d'équivalence de $(a, s) \in A \times S$.

Les lois internes $(a, s) \cdot (a', s') = (a a', s s')$ sont compatibles avec \mathcal{R} ,
 $(a, s) + (a', s') = (s' a + s a', s s')$

donc définissent 2 lois quotients :

$$\begin{cases} \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{a a'}{s s'} \\ \frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{a s' + s a'}{s s'} \end{cases} \quad \text{dans } S^{-1}A.$$

On vérifie que ces lois munissent $S^{-1}A$ d'une structure d'anneau unitaire commutatif.

Définition 4.1 : $S^{-1}A$ est appelé l'anneau des fractions de A défini par S .

L'application $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ est un morphisme d'anneau (non

injectif en général !), et chaque $\frac{a}{1}$ élément de $\varphi(S)$ est inversible dans $S^{-1}A$ ($\frac{a}{1}$ d'inverse $\frac{1}{a}$). Ker φ = éléments de S -torsion de A

Un S-morphisme de l'anneau A vers l'anneau B est un morphisme d'anneaux $\beta: A \rightarrow B$ tel que $\beta(S)$ soit inclus dans l'ensemble des éléments inversibles de B (ie $\beta(S) \subset B^*$). On a vu que $\varphi: A \rightarrow S^{-1}A$ est un S-morphisme.

Proposition 4.2: $(S^{-1}A, \varphi)$ est la solution du problème universel suivant:

"Pour tout anneau B et tout S-morphisme $\beta: A \rightarrow B$, il existe un et un seul morphisme $\tilde{\beta}: S^{-1}A \rightarrow B$ tel que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta} & B \\ \varphi \searrow & & \nearrow \tilde{\beta} \\ & S^{-1}A & \end{array}$$

soit commutatif."

De plus, le couple $(S^{-1}A, \varphi)$, où $S^{-1}A$ est un anneau et φ un S-morphisme, vérifiant la propriété ci-dessus est unique à isomorphisme d'anneaux près.

preuve: Posons $\tilde{\beta}\left(\frac{a}{s}\right) = \beta(a) \beta(s)^{-1}$ où $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$. $\tilde{\beta}$ est bien définie car $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \Rightarrow \exists t \in S$ a.s.t. $a's = a's't \Rightarrow (\beta(a)\beta(s') - \beta(a')\beta(s))\beta(t) = 0$ d'où $\beta(a)\beta(s')^{-1} = \beta(a')\beta(s)^{-1}$ car $\beta(t)$, $\beta(s)$ et $\beta(s')$ sont inversibles. On a $\tilde{\beta} \circ \varphi = \beta$ et $\tilde{\beta}$ est un morphisme d'anneaux. $\tilde{\beta}$ est unique tel que $\tilde{\beta} \circ \varphi = \beta$, puisque nécessairement $\tilde{\beta}\left(\frac{a}{1}\right) = \beta(a)$ si $a \in A$ et si $s \in S$, $\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1 \Rightarrow \beta(s) \cdot \tilde{\beta}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \Rightarrow \tilde{\beta}\left(\frac{1}{s}\right) = \beta(s)^{-1}$.

Soit (X, φ_X) un autre couple vérifiant la prop. universelle ci-dessus. Il existe un et un seul morphisme $\tilde{\varphi}$ tel que le diag:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & S^{-1}A \\ \varphi_X \downarrow & & \nearrow \tilde{\varphi} \\ & X & \end{array}$$

soit commutatif.

D'autre part, il existe 1 et 1 seul morphisme $\tilde{\varphi}_X$ rendant le diag. suiv. commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_X} & X \\ \varphi \downarrow & & \nearrow \tilde{\varphi}_X \\ & S^{-1}A & \end{array}$$

Alors $\tilde{\varphi}_X \circ \tilde{\varphi}$ est un morphisme rendant le diag:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_X} & X \\ \varphi_X \downarrow & & \nearrow \tilde{\varphi}_X \circ \tilde{\varphi} \\ & X & \end{array} \text{ comm.}$$

et l'unicité permet de conclure:

$$\tilde{\varphi}_X \circ \tilde{\varphi} = \text{id}_X$$

De même, $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}_X = \text{id}_{S^{-1}A}$, donc $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme de X vers $S^{-1}A$

CQFD

Remarques :

- 1) Si A est intègre, et si $0 \notin S$ alors $\varphi: A \rightarrow S^{-1}A$ est injective. En effet $a \in \ker \varphi \Leftrightarrow \frac{a}{s} = 0 \Leftrightarrow \exists t \in S \text{ at} = 0 \Rightarrow a = 0$ (car $t \neq 0$)
- 2) Si A est intègre et si $S = A \setminus \{0\}$ alors $S^{-1}A$ est un corps appelé le corps des fractions de l'anneau A . On immerge A dans $S^{-1}A$ grâce à φ .
- 3) Si $S = \{p^n / n \in \mathbb{N}^*\}$ on note $S^{-1}A = A_p$. Par exemple $\mathbb{Z}_{(p)}$ est l'anneau des nombres rationnels décimaux.
- 4) Si $S = A \setminus P$ où P est un idéal premier de A , on notera $S^{-1}A = A_P$.

Proposition 4.3 : Il existe une bijection croissante entre les idéaux premiers de A éloignés de S et les idéaux premiers de $S^{-1}A$.

preuve :

Notons $\mathcal{P}(A)$ (resp. $\mathcal{P}(S^{-1}A)$) l'ensemble des idéaux premiers de A éloignés de S (resp. des idéaux premiers de $S^{-1}A$). On pose :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \mathcal{P}(S^{-1}A) \\ I &\longmapsto S^{-1}I \doteq \text{idéal engendré par } \varphi(I) = \frac{I}{1} \end{aligned}$$

* φ surjective : Si $J \in \mathcal{P}(S^{-1}A)$, soit I l'idéal des numérateurs de J , ie :

$$I = \{a \in A / \exists s \in S \frac{a}{s} \in J\}$$

C'est un idéal, car si $a, a' \in A$, $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'} \in J$ donc $\frac{aa'}{ss'} \in J \Rightarrow aa' \in I$, et d'autre part $\frac{a'}{s} = \frac{a'}{s} \cdot \frac{s}{s} \in J$ donc $\frac{a'}{s} + \frac{a}{s} \in J \Rightarrow a + a' \in I$.

Alors :

$$1) \underline{S^{-1}I = J}$$

$J \subset S^{-1}I$ car si $j \in J$, $j = \frac{i}{s}$ et $i \in I$ donc $\frac{i}{s} = \frac{i}{s} \cdot \frac{1}{1} \in S^{-1}I$

$S^{-1}I \subset J$ car si $i \in I$ et $s \in S$, il existe $t \in S$ tel que $\frac{i}{t} \in J$, donc $\frac{i}{s} = \frac{t}{s} \cdot \frac{i}{t} \in J$

2) $I \cap S = \emptyset$: Sinon $i \in I \cap S \Rightarrow 1 = \frac{i}{i} \in S^{-1}I \Rightarrow S^{-1}I = S^{-1}A$, ce qui est absurde car $S^{-1}I = J$ est un idéal premier.

$$3) \underline{I \text{ premier}} :$$

$$\text{Si } a, b \in I \quad \exists s \in S \quad \frac{ab}{s} \in J \Rightarrow \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{1} \in J \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{s} \in J \\ \text{ou} \\ \frac{b}{1} \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in I \\ \text{ou} \\ b \in I \end{cases}$$

* φ bien définie : I premier éloigné de $S \Rightarrow S^{-1}I$ premier.

$\forall \frac{a}{s}, \frac{a'}{s'} \in S^{-1}A / \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} \in S^{-1}I$ notons $\alpha = aa'$ et $\sigma = ss'$, de sorte que

$aa'\sigma = \alpha ss' \in I$. Comme $I \cap S = \emptyset \Rightarrow \sigma \notin I$, et I premier, on obtient,

$$aa' \in I \Rightarrow \begin{cases} a \in I \\ \text{ou} \\ a' \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{s} \in S^{-1}I \\ \text{ou} \\ \frac{a'}{s'} \in S^{-1}I \end{cases}$$

* φ injective: $S^{-1}I = S^{-1}J \Rightarrow I = J$?

Il suffit de vérifier que $I \subset J$.

$$\forall a \in I \quad \frac{a}{1} \in S^{-1}I = S^{-1}J \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{a'}{s'} \text{ où } a' \in J$$

Donc $a s' = a' \in J$ et $s' \notin J$ car $I \cap S = \emptyset$, donc, comme J premier, $a \in J$. Finalement $I \subset J$.

* φ croissante: trivial.

CPFD

Soient A un anneau com. unitaire et S une partie multiplicative de A .

Si M est un A -module, on définit le module des fractions de M défini par S , comme suit :

On considère la relation d'équivalence \mathcal{R} dans $M \times S$:

$$(m, s) \mathcal{R} (m', s') \Leftrightarrow \exists t \in S \quad m s' t = m' s t$$

et les lois :

$$\begin{cases} (m, s) + (m', s') = (m s' + m' s, s s') \\ (a, s) \cdot (m, \sigma) = (a m, s \sigma) \quad (a, s) \in A \times S \quad (m, \sigma) \in M \times S \end{cases}$$

On note $\frac{m}{s}$ la classe d'équivalence de (m, s) pour \mathcal{R} . Ces 2 lois sont compatibles pour \mathcal{R} : vérifions-le pour la multiplication externe :

$$(a, s) \mathcal{R} (a', s') \Leftrightarrow \exists t \in S \quad a s' t = a' s t$$

$$(m, \sigma) \mathcal{R} (m', \sigma') \Leftrightarrow \exists p \in S \quad m \sigma' p = m' \sigma p$$

$$\text{d'où } a m s' \sigma' (t p) = s \sigma a' m' (t p) \Rightarrow (a m, s \sigma) \mathcal{R} (a' m', s' \sigma')$$

Ainsi $S^{-1}M \doteq M \times S / \mathcal{R}$ est structuré en $S^{-1}A$ -module pour les lois quotients :

$$\begin{cases} \frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{m s' + m' s}{s s'} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{\sigma} = \frac{a m}{s \sigma} \end{cases}$$

Notons $\varphi: M \rightarrow S^{-1}M$.

$$m \mapsto \frac{m}{1}$$

L'application $\varphi: A \rightarrow S^{-1}A$ permet aussi de structurer $S^{-1}M$ en A -module.

$$a \mapsto \frac{a}{1}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} M = A\text{-module} \\ S^{-1}M = S^{-1}A\text{-module} \end{cases}$$

Proposition 4.4: $(S^{-1}M, \psi)$ est la solution du problème universel :

" Pour tout $S^{-1}A$ -module N , tout morphisme de A -modules $f: M \rightarrow N$ se factorise de manière unique à travers $S^{-1}M$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \psi \searrow & & \nearrow \tilde{f} \\ & S^{-1}M & \end{array} \quad \tilde{f} = S^{-1}A\text{-linéaire} "$$

De plus, le couple $(S^{-1}M, \psi)$, où $S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$ -module et $\psi: M \rightarrow S^{-1}M$ A -linéaire, est unique s'il vérifie la propriété ci-dessus.

preuve:

Si \tilde{f} existe, on a $\tilde{f}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{s} f(m)$. Cette formule définit une application \tilde{f} $S^{-1}A$ -linéaire puisque :

$$\tilde{f}\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{\sigma}\right) = \frac{1}{s\sigma} f(am) = \frac{a}{s\sigma} f(m) = \frac{a}{\sigma} \cdot \tilde{f}\left(\frac{m}{s}\right)$$

et $\tilde{f} \circ \psi = f$.

L'unicité se montre comme en 4.2.

□□□□

4.5 Autre façon de définir $S^{-1}M$:

et Banneau (En fait $B = H$ -algèbre)

Rappel: Si B et M sont 2 A -modules, $B \otimes_A M$ est un B -module pour la loi $\lambda(b \otimes m) = (\lambda b) \otimes m$.

Soit $f: M \rightarrow S^{-1}A \otimes_A M$. f est A -linéaire, et $S^{-1}A \otimes_A M$ est structuré

$$m \mapsto 1 \otimes m$$

en $S^{-1}A$ -module. La propriété universelle 4.4 montre l'existence d'une unique application $S^{-1}A$ -linéaire \tilde{f} rendant le diagramme suiv.

com. :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & S^{-1}A \otimes_A M \\ \psi \searrow & & \nearrow \tilde{f} \\ & S^{-1}M & \end{array}$$

$$\text{d'ailleurs } \tilde{f}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{s} \otimes m$$

En fait, \tilde{f} est un $S^{-1}A$ -isomorphisme de $S^{-1}A$ -modules : l'application

$$\tilde{g}: S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M \text{ est bien définie et } A\text{-linéaire puisque}$$

$$\frac{a}{s} \otimes m \mapsto \frac{am}{s}$$

l'application $g: S^{-1}A \times M \rightarrow S^{-1}M$ est A -bilinéaire. En fait, \tilde{g}

$$\left(\frac{a}{s}, m\right) \mapsto \frac{am}{s}$$

est $S^{-1}A$ -linéaire car :

$$\tilde{g}\left(\frac{b}{\sigma} \left(\frac{a}{s} \otimes m\right)\right) = \tilde{g}\left(\frac{ba}{\sigma s} \otimes m\right) = \frac{bam}{\sigma s} = \frac{b}{\sigma} \tilde{g}\left(\frac{a}{s} \otimes m\right)$$

et l'on constate que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \text{id}_{S^{-1}M}$ et $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \text{id}_{S^{-1}A \otimes_A M}$.

Proposition 4.6: Avec les notations précédentes, l'application $\tilde{\beta} : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}A \otimes_A M$ est un isomorphisme de $S^{-1}A$ -modules, $\frac{m}{s} \mapsto \frac{1}{s} \otimes m$

et l'application réciproque est $\tilde{\beta} : S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M$
 $\frac{a}{s} \otimes m \mapsto \frac{am}{s}$

$$S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M$$

où $S^{-1}A \otimes_A M$ est canoniquement structuré en $S^{-1}A$ -module.

Soit P un idéal premier de A . $S = A \setminus P$ est alors une partie multiplicative de A . On note dans ce cas :

$$A_P = S^{-1}A$$

Comme dans la proposition 4.3, $S^{-1}P = P \cdot A_P$ désigne l'idéal de A_P engendré par $\varphi(P) = \frac{P}{1}$.

Proposition 4.7: A_P est un anneau local d'idéal maximal $S^{-1}P = P \cdot A_P$ et dont le corps résiduel $A_P / P \cdot A_P$ est isomorphe au corps des fractions de A/P .

preuve :

1) A_P est un anneau local : La proposition 4.3 montre que si M est un idéal maximal de A_P , on peut lui associer un idéal premier I de A disjoint de $S = A \setminus P$, donc $I \subset P$. Mais alors $M \subset S^{-1}P$ puisque la bijection 4.3 est croissante, et $S^{-1}P$ est un idéal de A_P donc $M = S^{-1}P = P \cdot A_P$.

2) $A_P / S^{-1}P \cong$ corps des fractions de A/P

$$\mathcal{F}(A/P) = \text{corps des fractions de } A/P = \{(x, y) / y \neq 0\} / \mathcal{R}$$

$$A_P / S^{-1}P = \frac{\{(x, y), y \notin P\} / \mathcal{R}}{\{(x/y) \in A_P / x \in P\}}$$

$$\text{On vérifie que l'application } \beta : A_P / S^{-1}P \longrightarrow \mathcal{F}(A/P) \text{ est}$$

$$\left(\frac{x}{y} \right) \longmapsto \frac{x}{y}$$

un isomorphisme de corps.

* β est bien définie

* β est surjective.

* β est un morphisme de corps.

* β est injective : $\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x \in P \Rightarrow \left(\frac{x}{y} \right) = 0$.

CQFD

Remarque: S^{-1} est un foncteur exact de la catégorie des A -modules dans la catégorie des $S^{-1}A$ -modules.

Soit P un idéal premier de A et $S = A \setminus P$. On note :

$$\begin{cases} A_P = S^{-1}A \\ M_P = S^{-1}M = S^{-1}A \otimes_A M \\ \bar{M}_P = M_P / P M_P \text{ et } \bar{A}_P = A_P / P A_P \end{cases}$$

On a $\boxed{\bar{M}_P = A_P / P A_P \otimes_{S^{-1}A} M_P}$

En effet, $P A_P \hookrightarrow A_P \rightarrow A_P / P A_P \rightarrow 0$ est une suite exacte de $S^{-1}A$ -modules, et le foncteur \otimes est exact à droite donc :

$$P A_P \otimes_{S^{-1}A} M_P \xrightarrow{i_*} \underbrace{A_P \otimes_{S^{-1}A} M_P}_{= M_P} \rightarrow A_P / P A_P \otimes_{S^{-1}A} M_P \rightarrow 0$$

est exacte. $\text{Im } i_* = P M_P$, d'où le résultat.

Proposition 4.8 :

A = anneau

M = A -module de type fini

P = idéal premier de A

$\text{Ann } M = \{a \in A / aM = 0\}$

Alors :

$$\boxed{\text{Ann } M \not\subset P \Leftrightarrow M_P = 0 \Leftrightarrow \bar{M}_P = 0}$$

preuve :

1) $M_P = 0 \Rightarrow \bar{M}_P = 0$ (trivial)

2) Le lemme de Nakayama montre que $\bar{M}_P = 0 \Rightarrow M_P = 0$. En effet :

$$M_P / P M_P = 0 \Leftrightarrow M_P = P M_P = P A_P \cdot M_P$$

où $\begin{cases} P A_P \text{ est l'idéal maximal de l'anneau local } S^{-1}A \\ M_P \text{ est un } S^{-1}A\text{-module de type fini} \end{cases}$

donc $M_P = 0$.

3) Si $a \in (\text{Ann } M) \setminus P$ $M_P = 1 \cdot M_P = \frac{a}{a} (S^{-1}A \otimes_A M) = \frac{1}{a} (a S^{-1}A \otimes_A M)$

$$= \frac{1}{a} (S^{-1}A \otimes_A aM) = 0 \text{ car } aM = 0.$$

4) $M_P = 0 \Leftrightarrow S^{-1}A \otimes_A M = 0$

Soit m_1, \dots, m_p un système de générateurs de M . On a $1 \otimes_A m_i = 0$ donc $\exists t_i \notin P$ $t_i m_i = 0$ (d'après l'identification 4.6, $1 \otimes_A m_i = 0 \Leftrightarrow \frac{m_i}{1} = 0$ dans $S^{-1}M$)

Alors $(t_1, \dots, t_p)M = 0$ et $t_1 \dots t_p \notin P$ (sinon P premier $\Rightarrow \exists i$ $t_i \in P$)

Finalement $t_1, \dots, t_p \in (\text{Ann } M) \setminus P$.

CQFD

5. Éléments nilpotents :

Un élément x d'un anneau unitaire A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Un anneau réduit est un anneau qui ne possède pas d'éléments nilpotents non nuls.

L'ensemble \mathcal{N} des éléments nilpotents de A s'appelle le nilradical de A . \mathcal{N} est un idéal de A .

Soit $\{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}$ la famille des idéaux premiers de A .

$$x \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad x^n = 0 \in \mathcal{P}_i \Rightarrow x \in \mathcal{P}_i \quad \forall i \in I \Rightarrow \mathcal{N} \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$$

En fait, nous avons :

|| Proposition 5.1 : On a $\mathcal{N} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$

preuve : Tout revient à montrer que si $t \notin \mathcal{N}$ il existe un idéal premier \mathcal{P} qui ne contient pas t .

$S = \{1, t, t^2, \dots, t^k, \dots\}$ est une partie multiplicative de A . L'ensemble des idéaux de A disjoints de S est un ensemble ordonné inductif non vide (il contient 0). Le théorème de Zorn montre qu'il existe un élément maximal \mathcal{P} de cet ensemble. Montrons que \mathcal{P} est premier : si $u \notin \mathcal{P}$ et $v \notin \mathcal{P}$, comme \mathcal{P} est un élément maximal :

$$\mathcal{P} + Au \cap S \neq \emptyset$$

$$\text{et } \mathcal{P} + Av \cap S \neq \emptyset$$

Donc $\mathcal{P} + Au \cap \mathcal{P} + Av \cap S \neq \emptyset$ car S est multiplicatif, donc $uv \notin \mathcal{P}$
CQFD

Corollaire 5.2 : Si I est un idéal de A , on a :

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathcal{P}_i \supset I \\ \mathcal{P}_i \text{ premier}}} \mathcal{P}_i$$

preuve : Les idéaux de A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I , et la bijection croissante est la suivante :

Notons $\mathcal{J}(A)$ (resp. $\mathcal{J}(A/I)$) l'ensemble des idéaux de A contenant I (resp. des idéaux de A/I).

$$\mathcal{J}(A) \xrightarrow{\quad \mathcal{F} \quad} \mathcal{J}(A/I)$$

$$J \longmapsto J/I = \{x \in A/I \mid x \in J\}$$

$$L = \{k + I \mid k \in J\} \longleftarrow J$$

Dans cette correspondance, $a \in \sqrt{I} \Leftrightarrow \bar{a} \in \mathcal{N}(A/I) \doteq \text{nilradical de } A/I$
donc :

$$\mathfrak{F}(\sqrt{I}) = \mathcal{N}(A/I) \quad (1)$$

et :

$$I \in \mathcal{J}(A) \text{ premier} \Leftrightarrow \mathfrak{F}(I) \in \mathcal{J}(A/I) \text{ premier} \quad (2)$$

Vérifions (2) : Si $J \in \mathcal{J}(A/I)$ est premier, $x.y \in L = \{k + I / \bar{k} \in J\}$

donne si $\bar{x}.\bar{y} \in J \Rightarrow \bar{x} \in J$ ou $\bar{y} \in J \Rightarrow x \in L$ ou $y \in L$

Inversement, si $J \in \mathcal{J}(A)$ est premier, si $\bar{x}.\bar{y} \in J/I \Leftrightarrow x.y \in J \Rightarrow x \in J$ ou $y \in J \Rightarrow \bar{x} \in J/I$ ou $\bar{y} \in J/I$.

Le corollaire provient alors directement de 5.1, puisque :

$$\mathcal{N}(A/I) = \bigcap_{\substack{P_i \supset I \\ P_i \text{ premier}}} \mathfrak{F}(P_i) \Rightarrow \sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P_i \supset I \\ P_i \text{ premier}}} P_i$$

(en appliquant \mathfrak{F}^{-1} compatible avec l'intersection).

CQFD

Proposition 5.3 : A anneau

$M = A$ -module de type fini

$B = A$ -algèbre

On note $I = \text{Ann } M$ et $J = \text{Ann } N$ où $N \doteq B \otimes_A M$ est structuré canoniquement en B -module

Alors :

$$IB \subset J \subset \sqrt{IB}$$

preuve :

* $IB \subset J$ est trivial, car $\forall a \in I \quad ab(b' \otimes_A m) = (abb' \otimes_A m) = bb' \otimes_A am = 0$
(car $am = 0$)

* Montrons que :

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} Q \text{ premier} \\ IB \subset Q \end{array} \right\} \Rightarrow J \subset Q \quad \text{de sorte que } J \subset \sqrt{IB} \text{ d'après la pro. 5.2.}$$

Soit $P = \{a \in A / a.1_B \in Q\}$.

P est premier, et si l'on montre

$$(2) \quad ICP \Rightarrow J \subset Q$$

Alors, comme $IB \subset Q$, on aura ICP donc $J \subset Q$, et (1) sera montré.

Tout revient à montrer (2).

La prop. 4.8 donne : $ICP \Leftrightarrow \bar{M}_P \neq 0$
 $\Downarrow (3) ?$

et : $JCQ \Leftrightarrow \bar{N}_Q \neq 0$

Tout revient à montrer (3).

On a le diag. commutatif :

$$\begin{array}{ccc} 1_A & \xrightarrow{\quad} & 1_B \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(A/P) \simeq \bar{A}_P & \xrightarrow{\quad} & \bar{B}_Q \simeq \mathcal{F}(B/Q) \\ \frac{x}{y} \text{ (où } y \neq 0) & \xrightarrow{\quad} & \frac{x \cdot 1}{y \cdot 1} \end{array}$$

($\mathcal{F}(\) =$ corps des fractions de $(\)$)
 l'isomorphisme $\mathcal{F}(A/P) \simeq \bar{A}_P$ est donné en 4.7)

Ce diagramme permet de structurer \bar{B}_Q en \bar{A}_P -module.

Supposons $\bar{M}_P \neq 0$,

On a : (4) $\bar{N}_Q = \bar{B}_Q \otimes_B N$

En effet : $\bar{N}_Q = \bar{B}_Q \otimes_{B_Q} N_Q = \bar{B}_Q \otimes_{B_Q} (B_Q \otimes_B N) = \bar{B}_Q \otimes N$
 (de 4.6)

Alors :

$$\begin{aligned} \bar{N}_Q &= \bar{B}_Q \otimes_B N = \bar{B}_Q \otimes_B (B \otimes_A M) = \bar{B}_Q \otimes_A M \\ &= (\bar{B}_Q \otimes_{\bar{A}_P} \bar{A}_P) \otimes_A M = \bar{B}_Q \otimes_{\bar{A}_P} (\bar{A}_P \otimes_A M) \\ &= \bar{B}_Q \otimes_{\bar{A}_P} \bar{M}_P \end{aligned}$$

Or $\bar{M}_P \neq 0$ et \bar{M}_P est un espace vectoriel sur le corps résiduel \bar{A}_P , donc
 $\bar{M}_P = \bigoplus_1^N \bar{B}_Q$ et :

$$\bar{N}_Q = \bar{B}_Q \otimes_{\bar{A}_P} \left(\bigoplus_1^N \bar{A}_P \right) = \bigoplus_1^N \bar{B}_Q$$

Enfin $\bar{B}_Q \neq 0$ (car l'idéal maximal $Q \cdot B_Q$ n'est pas tout B_Q), donc
 $\bar{N}_Q \neq 0$, ce qui prouve (3).

CPFD

Lemme 5.4 : Tout idéal premier de A contient un idéal premier minimal. Ainsi, le nilradical de A s'écrit il comme l'intersection des idéaux premiers minimaux.

preuve : Soit P un idéal premier. L'ensemble des idéaux premiers inclus dans P forment un ensemble ordonné inductif pour l'ordre inverse de \subset : en effet, si $\{P_i\}_{i \in I}$ est une partie totalement ordonnée de cet ensemble, $\bigcap P_i$ est un idéal premier puisque

$$\lambda \mu \in \bigcap P_i \Rightarrow \lambda \mu \in P_i \quad \forall i \in I$$

Si $\mu \notin \bigcap P_i$ il existe $i \in I$ / $\mu \notin P_i$ donc $\lambda \in P_i$.

$$\left. \begin{array}{l} \forall P_i \supset P_j : \lambda \in P_i \Rightarrow \lambda \in P_j \\ \forall P_i \subset P_j : \mu \notin P_i \Rightarrow \mu \notin P_j \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \in \bigcap_{i \in I} P_i$$

Finalement, le théorème de Zorn montre l'existence d'un élément minimal.

□□□

Proposition 5.5 :

A anneau noethérien

\mathcal{N} = nilradical de A

(1) Il existe $n \in \mathbb{N}$ / $\mathcal{N}^n = 0$

(2) Si I est un idéal de A , notons $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I . Alors l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{P}(I)$ est fini.

NB: Pour $I = \{0\}$, (2) implique que le nilradical \mathcal{N} peut toujours s'écrire comme l'intersection finie d'idéaux premiers minimaux.

preuve :

(1) facile : Si r_1, \dots, r_p est un système de générateurs de \mathcal{N} , il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tels que $r_i^{n_i} = 0$, d'où $\mathcal{N}^n = 0$ si $n = \sum_{i=1}^p n_i$.

(2) Principe de la récurrence noethérienne :

" Soient E un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admette un élément maximal, et $F \subseteq E$. Alors $F = E \Leftrightarrow (N)$ vrai, où :

$$(N) \quad \forall e \in E \quad \{ \forall x \in E \quad x > e \Rightarrow x \in F \} \Rightarrow e \in F$$

En effet, si $F \neq E$ on note e un élément maximal de $E \setminus F$. (N) implique que $e \in F$, ce qui est absurde.

Pour montrer (2), on pose :

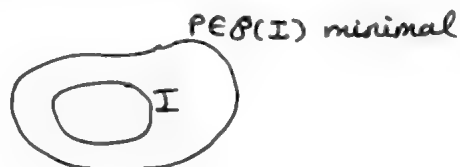
E = ensemble des idéaux de A ordonnés par l'inclusion.

Toute partie non vide de E admet un élément maximal puisque A est noethérien.

$\forall I \in E$ notons $\mathcal{P}'(I)$ l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{P}(I)$, et posons :

$$F = \{ I \in E / \mathcal{P}'(I) \text{ fini} \}$$

Alors $F = E$ puisque F vérifie (N) :



Pour $I \in E$ fixé, de 2 choses l'une :

* Ou bien I premier, alors $\#P'(I) = 1 \Rightarrow I \in F$ (1)
 * Ou bien I n'est pas premier, alors on choisit
 $x, y \in I$ avec $x \notin I$ et $y \notin I$. Si $P \in P(I)$, $P \subset I$
 donc $xy \in P \Rightarrow x \in P$ ou $y \in P$
 $\Rightarrow I + Ax \subset P$ ou $I + Ay \subset P$
 $\Rightarrow P'(I) \subset P'(I + Ax) \cup P'(I + Ay)$ (2)

et (N) se voit directement :
 Si $\forall J \in E \quad J \not\subset I \Rightarrow J \in F$, on a :

{ si I premier $I \in F$ d'après (1)
 sinon, $I + Ax \in F$ et $I + Ay \in F$ d'après (3), et (2) donne
 $P'(I) \subset P'(I + Ax) \cup P'(I + Ay) \Rightarrow I \in F$.

Q.E.D.

1. Préfaisceau et faisceau

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{F} & F(U) \\
 \downarrow & & \uparrow p_{UV} \\
 V & \xrightarrow{F} & F(V)
 \end{array}$$

Définition 1.1 : Soit X un espace topologique. Un préfaisceau d'ensembles (resp. de groupes, d'anneaux, etc...) sur X est un foncteur contravariant de la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les flèches sont les inclusions évidentes dans la catégorie des ensembles (resp. des groupes, des anneaux, etc...)

Ainsi, un préfaisceau de groupes sur X est la donnée pour tout ouvert U de X d'un groupe $F(U)$, et pour tout couple $U \subset V$ d'ouverts de X d'un homomorphisme de groupes $p_{UV} : F(V) \rightarrow F(U)$ appelé "restriction", qui satisfait $p_{UU} = \text{id}_{F(U)}$ et $U \subset V \subset W \Rightarrow p_{UW} = p_{UV} \circ p_{VW}$.

On note souvent $p_{UV}(s) = s|_U$ si $s \in F(V)$

Définition 1.2 : Un morphisme de préfaisceaux entre 2 préfaisceaux F et G sur le même espace topologique X est un morphisme de foncteurs, ie une collection $\lambda = \{\lambda(U)\}$ de morphismes $\lambda(U) : F(U) \rightarrow G(U)$ qui commutent avec les restrictions :

$$\begin{array}{ccc}
 F(U) & \xrightarrow{\lambda(U)} & G(U) \\
 p_{UV} \uparrow & & \uparrow p'_{UV} \\
 F(V) & \xrightarrow{\lambda(V)} & G(V)
 \end{array}$$

$$\lambda(U) \circ p_{UV} = p'_{UV} \circ \lambda(V) \text{ si } U \subset V.$$

On définit la fibres de F en $x \in X$ par :
suppose connue, à ce sujet, les définitions de la limite inductive d'un système ordonné

$$F_x = \varinjlim_{x \in U \subset X} F(U)$$

, et on
équivalente
inductif.

Si $\varphi : F \rightarrow G$ est un morphisme de préfaisceaux sur X , on définit l'application $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$ par passage à la limite inductive :

$$\begin{array}{ccccc}
 F(U) & \xrightarrow{p_x} & F_x & & \\
 \uparrow p_{UV} & \searrow p_x & \nearrow \varphi_x & \searrow \varphi_x & \\
 & & F(U) & & \\
 F(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & G(U) & \xrightarrow{p'_x} & G_x \\
 & \nearrow \varphi(V) & \uparrow p'_{UV} & \nearrow p'_x & \\
 & & G(V) & &
 \end{array}$$

L'existence de φ_x est immédiate si l'on applique la propriété universelle de la limite inductive : le système d'applications $\{p'_x \circ \varphi(U)\}_{U \ni x}$ commute avec les restrictions p_{UV} donc se factorise à travers la limite inductive F_x . L'existence de φ_x est vraiment une propriété de la limite inductive :

Rappel : Le foncteur \varinjlim est un foncteur de la catégorie dont les objets sont les systèmes inductifs d'ensemble (resp. groupes, etc...) indexés par I , disons $\{(M_i, \beta_{ji})\}_{i \in I}$, où I est un ensemble ordonné d'indices filtrant à droite, et dont les flèches sont les morphismes $g = (g_i)_{i \in I}$, $g_i : M_i \rightarrow N_i$, tels que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\beta_{ji}} & M_j \\ \downarrow g_i & & \downarrow g_j \\ N_i & \xrightarrow{\beta'_{ji}} & N_j \end{array} \quad \text{soient commutatifs,}$$

dans la catégorie des ensembles (resp. groupes, etc...) .

Le foncteur \varinjlim est un foncteur exact. (cf R1)

Définition 1.3 :

Un faisceau F sur l'espace topologique X est un préfaisceau sur X qui vérifie : Pour tout les ouverts U, U_i de X tels que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$,

(F1) (Axiome de recollement des sections)

$$\forall f_i \in F(U_i) \quad \forall i, j \in I \quad f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \exists f \in F(U) \quad f|_{U_i} = f_i \quad \forall i$$

(F2) (Axiome d'unicité du recollement)

$$\forall f, g \in F(U) \quad \forall i \in I \quad f|_{U_i} = g|_{U_i} \Rightarrow f = g$$

Un préfaisceau qui vérifie (F1) et (F2) s'appelle aussi un préfaisceau complet.

Définition 1.4 : Un morphisme de faisceaux est un morphisme de préfaisceaux entre les préfaisceaux sous-jacents.

On note $\text{Hom}(F, G)$ l'ensemble des morphismes de faisceaux de F dans G . $f \in \text{Hom}(F, G)$ s'appelle un isomorphisme de faisceaux s'il existe $g \in \text{Hom}(G, F)$ tel que $g \circ f = \text{id}_F$ et $f \circ g = \text{id}_G$.

Proposition 1.5 : Soit $\varphi : F \rightarrow G$ un morphisme de faisceaux.

Alors :

$$\varphi \text{ isomorphisme de faisceaux} \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \varphi_x \text{ bijective.} \quad (*)$$

preuve : $\varphi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$ est un isomorphisme pour tout ouvert U de X ssi φ est un isomorphisme de faisceaux. Cela étant :

(\Rightarrow) trivial. C'est la fonctorialité de la limite inductive.

(\Leftarrow) * $\varphi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$ est injective :

$\varphi(U)f = \varphi(U)g \Rightarrow \varphi_n(b_n) = \varphi_n(g_n) \quad \forall x \in U$, par passage à la limite inductive,
 $\Rightarrow b_n = g_n$ puisque φ_n est injective,
 $\Rightarrow \exists W$ vois. de x $b|_W = g|_W$ par déf. de la lim. ind.

f et g sont 2 sections sur U qui coïncident sur chaque ouvert W d'un recouvrement de U . L'axiome d'unicité du recollement donne bien $f = g$ sur U .

* $\varphi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$ est surjective :

$\forall g \in G(U) \quad \exists b_x / \varphi_x(b_x) = g_x$

Donc il existe un voisinage W_x de x dans U tel que $\varphi(W_x)(b, w_x) = g, w_x$ où b, w_x désigne un représentant de la classe $b_x \in F_x$ défini sur W_x (ie $b, w_x \in F(W_x)$ et $\varphi_x(b, w_x) = b_x$)

On a, pour tout W_y voisinage de y du type précédent, $b, w_x|_{W_x \cap W_y} = b, w_y|_{W_x \cap W_y}$ puisque $\varphi(W_x \cap W_y)(b, w_x|_{W_x \cap W_y}) = \varphi(W_x \cap W_y)(b, w_y|_{W_x \cap W_y})$ et puisque $\varphi(W_x \cap W_y)$ est injective d'après le stade ci-dessus.

On peut donc recoller les sections $b, w_x \in F(W_x)$ pour obtenir une section globale $f \in F(U)$ vérifiant $\varphi(U)(f) = g$ grâce à l'unicité du recollement dans $G(U)$.

* $\varphi(U)^{-1}$ est-il un morphisme de préfaisceau?

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & F(V) \\ \varphi(U) \downarrow & & \downarrow \varphi(V) \\ G(U) & \xrightarrow{\rho'_{UV}} & G(V) \\ \varphi(U)^{-1} \downarrow & & \downarrow \varphi(V)^{-1} \\ F(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & F(V) \end{array}$$

La commutativité du 1^{er} carré entraîne la commutativité du second :

$$\varphi(V) \circ \rho_{UV} = \rho'_{UV} \circ \varphi(U)$$

\Downarrow

$$\rho_{UV} \circ \varphi(U)^{-1} = \varphi(V)^{-1} \circ \rho'_{UV}$$

CQFD

Définition 1.6 : Soit \underline{A} un faisceau d'anneaux sur X . On appelle " \underline{A} -module" un faisceau de groupes \underline{F} sur X tel que, pour tout ouvert U de X , $\underline{F}(U)$ soit un $\underline{A}(U)$ -module et tel que les opérations de restrictions $\rho_{UV} : \underline{F}(V) \rightarrow \underline{F}(U)$ soient \underline{A}_{UV} -linéaires (où $\underline{A}_{UV} : \underline{A}(V) \rightarrow \underline{A}(U)$ désignent les restrictions de \underline{A}).

Un "morphisme de \underline{A} -modules" est un morphisme de faisceaux $\varphi : \underline{F} \rightarrow \underline{G}$ tel que $\varphi(U) : \underline{F}(U) \rightarrow \underline{G}(U)$ soient toutes $\underline{A}(U)$ -linéaires. On notera qu'alors $\varphi_x : \underline{F}_x \rightarrow \underline{G}_x$ est \underline{A}_x -linéaire.

(NB : Si $\{(M_i, \beta_{ji})\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est un syst. inductif et si $M_i = A_i$ -module où $\{(A_i, \beta'_{ji})\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est encore un syst. ind., et si de plus les β_{ji} sont β'_{ji} -linéaires, alors $\varinjlim M_i$ est un $\varinjlim A_i$ -module.) (cf R2)

2. Espaces étalés. Faisceau associé à un préfaisceau.

Définition 2.1 : Un espace topologique (resp. espace étalé) au dessus de l'espace topologique X est la donnée d'un couple (E, p) où E est un e.t. et où $p: E \rightarrow X$ est continue (resp. un homéomorphisme local)

Si (E, p) est un espace topologique au dessus de X et si $U \subset X$, on note

$$\underline{C}(U, E) = \{ \text{sections de } E \text{ sur } U \} \doteq \{ s: U \rightarrow E \text{ continues} / p \circ s = \text{id}_U \}$$

On notera aussi $E(x) = p^{-1}(x)$ la fibre de p au dessus de x .

Un morphisme d'espaces topologiques au dessus de X est une application continue $\beta: E \rightarrow E'$ telle que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\beta} & E' \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$$

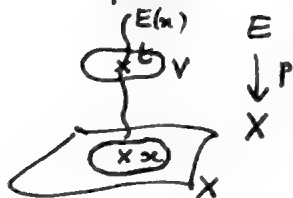
La correspondance $U \mapsto \underline{C}(U, E)$ définit un faisceau d'ensemble que l'on appelle le faisceau des sections de l'espace topologique E au dessus de X , (E, p) . On notera $\underline{C}(E)$ ce faisceau et $\underline{C}(E)_x = \underline{C}_x(E)$.

On définit l'évaluation en $x \in X$ comme l'application

$$\begin{array}{ccc} E_x: \underline{C}_x(E) & \longrightarrow & E(x) = p^{-1}(x) \\ s_x & \longmapsto & s(x) \end{array}$$

Proposition 2.2 : Soit (E, p) un espace étalé au dessus de X . Alors, $\forall x \in X \quad E_x: \underline{C}_x(E) \rightarrow E(x)$ est bijective.

preuve :



Il suffit de constater que tout point t de la fibre $E(x)$, ie vérifiant $p(t) = x$, est recapturé par une section s définie sur un voisinage x de X , et une seule. Comme p est un homéo. local, il existe un voisinage ouvert V de x dans E / $p|_V: V \rightarrow p(V)$ homéomorphisme. Alors $(p|_V)^{-1}: p(V) \rightarrow V$ est une section de E sur $p(V)$ et vérifie $(p|_V)^{-1}(x) = t$.

\square

2.3 Espace étalé associé à un préfaisceau.

Soit \underline{E} un préfaisceau. On pose $E = \bigcup \underline{E}_x$ et $p: E \longrightarrow X$, et $\underline{E}(x) \longrightarrow x$

on munit E de la topologie la plus fine rendant toutes les sections $\tilde{s}: U \longrightarrow E$ (où $s \in \underline{E}(U)$) continues.

$$x \mapsto s_x$$

Ainsi Ω est un ouvert de E si $\forall s \in \underline{E}(U) \quad \tilde{s}^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans X .

2.4 Proposition et définition : (E, p) ainsi défini est un espace étalé. On l'appelle l'espace étalé associé au préfaisceau \underline{E} .

preuve:

* p continue : $\forall V \in X \quad \Omega = p^{-1}(V)$ est ouvert dans E puisque si $s \in \underline{E}(U)$

$$\tilde{s}^{-1}(\Omega) = \{x \in U / s(x) \in p^{-1}(V)\} = \{x \in U / x \in V\} = U \cap V$$

* p homéomorphisme local :

D'après la définition de \underline{E}_x , si $\theta_x \in \underline{E}_x = \underline{E}(x)$, il existe un voisinage ouvert U de x et une section

$\theta \in \underline{E}(U)$ telle que $\theta(x) = \theta_x$.

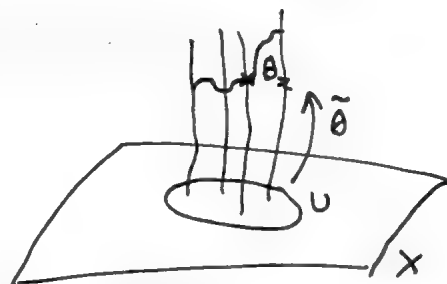
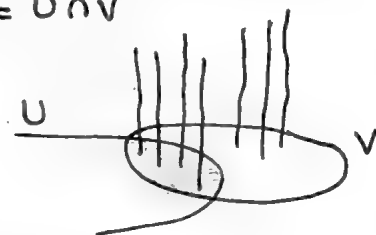
On définit alors

$$\tilde{\theta}: U \longrightarrow \tilde{\theta}(U)$$

$$x \mapsto \theta_x$$

et il faut montrer que $\tilde{\theta}(U)$ est un ouvert, que $\tilde{\theta}$ est continue et que $\tilde{\theta}$ est un isomorphisme local de p .

Le dernier point est évident.



* $\tilde{\theta}(U)$ ouvert : $\forall s \in \underline{E}(V) \quad \tilde{s}^{-1}(\tilde{\theta}(U)) = \{y \in V / s_y \in \tilde{\theta}(U)\}$

$$= \{y \in U \cap V / s_y = \theta_y\}$$

est bien ouvert car $\theta_y = s_y$ sont des germes, donc coïncident localement lorsqu'ils coïncident en un point.

* $\tilde{\theta}: U \longrightarrow \tilde{\theta}(U)$ est continue car $\tilde{\theta}: U \longrightarrow E$ est continue (puisque $\theta \in \underline{E}(U)$, et par définition de la topologie sur E)

CPFD

Remarque : La topologie de E n'est pas séparée, en général.

Notons : $\begin{cases} \underline{\text{Préfaisc.}} & \text{la catégorie des préfaisceaux sur } X, \\ \underline{\text{Esp. étal.}} & \text{la catégorie des espaces étalés au dessus de } X, \\ \underline{\text{Faisc.}} & \text{la catégorie des faisceaux sur } X. \end{cases}$

Proposition 2.5 : On peut définir les 2 foncteurs :

$$\alpha : \underline{\text{Préfaisc.}} \longrightarrow \underline{\text{Esp. étal.}}$$

$$\beta : \underline{\text{Esp. étal.}} \longrightarrow \underline{\text{Faisc.}}$$

preuve :

$$\alpha : \underline{\text{Préfaisc.}} \longrightarrow \underline{\text{Esp. étal.}}$$

$$\text{préfaisceau } \underline{E} \longmapsto \text{espace étalé } E \text{ associé à } \underline{E}$$

Si $\underline{E} \xrightarrow{\varphi} \underline{F}$ est un morphisme de préfaisceaux, on sait définir

$\varphi_x : E_x \rightarrow F_x$ d'où un morphisme $\alpha(\varphi) = \{\varphi_x\}_{x \in X}$:

$$\begin{array}{ccc} E = \alpha(\underline{E}) = \bigcup_{x \in X} E_x & \xrightarrow{\alpha(\varphi)} & F = \alpha(\underline{F}) = \bigcup_{x \in X} F_x \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

$P \quad P'$

qui commute avec les projections p et p' . $\alpha(\varphi)$ est bien continue, puisque si Ω' est un ouvert de F ,

$$\Omega = \alpha(\varphi)^{-1}(\Omega') \text{ ouvert de } E \Leftrightarrow \forall x \in E(U) \quad \varphi_x^{-1}(\Omega) = (\varphi_x \circ \varphi_U)^{-1}(\Omega') \quad (*)$$

ouvert par définition
de la topologie de F
(car $\varphi_U \circ \varphi_U \in F(U)$)
car $\varphi_U(\varphi_U) \in F(U)$

d'où se montre directement :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\Omega) &= \{x \in X / \varphi_x \in \alpha(\varphi)^{-1}(\Omega')\} \\ &= \{x \in X / \varphi_x(\varphi_x) \in \Omega'\} \\ &= \{x \in X / \varphi_U(\varphi_x) \in \Omega'\} \quad \text{car } \varphi_x(\varphi_x) = \varphi_U(\varphi_x) \\ &= (\varphi_U)^{-1}(\Omega') \\ &= \{x \in X / (\varphi_U(\varphi_x))_x \in \Omega'\} \quad \text{car } \varphi_x(\varphi_x) = (\varphi_U(\varphi_x))_x \quad \text{cf R1} \\ &= (\varphi_U(\varphi_x))^{-1}(\Omega') \end{aligned}$$

$$\beta: \text{Esp. étal.} \longrightarrow \text{Faisc.}$$

$$E \longmapsto \underline{C}(E) = \text{faisceau des sections de l'espace étalé } E$$

Si $f: E \rightarrow E'$ est un morphisme d'espaces étalés, et si $s: U \rightarrow E$ on définit $\beta(f)(s) = f \circ s: U \rightarrow E'$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$$

cqFD

Notons que $\beta \circ \alpha: \text{Préfaisc.} \longrightarrow \text{Faisc.}$ est un foncteur. On dit que $\beta \circ \alpha(\underline{E})$ est le faisceau associé au préfaisceau \underline{E} .

Proposition 2.6:

Notons α_F la restriction du foncteur α à la catégorie des Faisceaux. Alors:

$$\text{Faisc.} \xrightarrow{\alpha_F} \text{Esp. étal.} \xrightarrow{\beta} \text{Faisc.}$$

Alors α_F et β sont inverses l'un de l'autre, à isomorphisme près, ie $\beta \circ \alpha_F \simeq \text{Id}$ et $\alpha_F \circ \beta \simeq \text{Id}$ (\simeq isomorphisme de foncteurs). On a donc une équivalence de catégorie entre la catégorie Faisc. et la catégorie Exp. étal.

Proposition 2.7: $\varphi(U): \underline{E}(U) \longrightarrow \beta \circ \alpha(\underline{E})(U)$ définit un morphisme φ de préfaisceau, et l'on a:

$$s \longmapsto \tilde{s}$$

de préfaisceau, et l'on a:

$\underline{E} \text{ est un faisceau} \iff \varphi \text{ est un isomorphisme}$

preuve: le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \beta \circ \alpha(\underline{E})(U) \\ s \longmapsto \tilde{s} & & \text{où } \tilde{s}(x) = s_x \\ \downarrow p_U & & \downarrow p'_U \\ \underline{E}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \beta \circ \alpha(\underline{E})(V) \end{array}$$

est commutatif,

et $\varphi_x: \underline{E}_x \longrightarrow \beta \circ \alpha(\underline{E})_x = \underline{C}_x(\alpha(\underline{E}))$ est bijectif, donc la prop. 1.5
 $s_x \longmapsto \tilde{s}_x$
 $\simeq \alpha(\underline{E})(x)$
 par E_x

permet de conclure.

cqFD

(\Leftarrow)?

2.8 Problème universel du faisceau associé au préfaisceau :

Soit \underline{E} un préfaisceau, et $\beta \circ \alpha(\underline{E})$ son faisceau associé. Pour tout faisceau \underline{F} et pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi: \underline{E} \rightarrow \underline{F}$, il existe un et un seul morphisme de faisceaux $\tilde{\varphi}$ qui rend le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{E} & \xrightarrow{\varphi} & \underline{F} \\ \beta \circ \alpha \searrow & & \nearrow \tilde{\varphi} \\ & \beta \circ \alpha(\underline{E}) & \end{array} \quad \text{commutatif}$$

preuve:

Si $U \in \mathcal{X}$, $\beta \circ \alpha(U): \underline{E}(U) \longrightarrow \beta \circ \alpha(\underline{E})(U)$, $\tilde{\varphi}$ étant bien continue
 $\delta \longmapsto \tilde{\varphi}_x = \{x \mapsto \delta_x\}$

d'après 2.3. Soit $\varphi(U): \underline{E}(U) \longrightarrow \underline{F}(U)$ est donné.
 $\delta \longmapsto \varphi(U)(\delta)$

Si $\tilde{\delta} \in \beta \circ \alpha(\underline{E})(U)$ et $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x inclus dans U et $\delta \in \underline{E}(V)$ tels que $\tilde{\delta}|_V = \{x \mapsto \delta_x\}$. On pose alors :

$$\tilde{\varphi}(V)(\tilde{\delta}|_V) = \varphi(V)(\delta)$$

Ainsi, en considérant $\beta \circ \alpha(\underline{E})$ et \underline{F} comme des espaces étalés, on a prouvé :

$$\tilde{\varphi}_x(\tilde{\delta}_x) = \varphi_x(\delta_x) \quad (1)$$

Il suffit de constater que $\tilde{\varphi} = \{\tilde{\varphi}_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ est continue pour conclure à l'existence de $\tilde{\varphi}$.

L'unicité de $\tilde{\varphi}$ est immédiate (cf (1)).

CQFD

3. Rappels sur les catégories.

La déf. d'une catégorie et de foncteurs entre catégories est supposée connue. Ce qui suit est développé dans le livre de Cartan, "éléments d'algèbre homologique".

3.1 Définitions.

Soit \mathcal{C} une catégorie.

$f \in \text{Hom}(A, B)$ est un épimorphisme si $\forall g, g' \in \text{Hom}(B, C) \quad g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g'$

$f \in \text{Hom}(A, B)$ est un monomorphisme si $\forall g, g' \in \text{Hom}(C, A) \quad f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$

$f \in \text{Hom}(A, B)$ est un isomorphisme si $\exists g \in \text{Hom}(B, A) \quad \exists g' \in \text{Hom}(A, B)$
tel que $f \circ g = \text{id}_B$ et $g' \circ f = \text{id}_A$.

Il est clair que f isomorphisme $\Rightarrow f$ est un épi- et un monomorphisme. La réciproque est fautive en général (mais sera vraie pour la catégorie des faisceaux sur X)

3.2 Objet initial, objet final, objet nul.

Un objet P est dit initial (resp. final) si $\text{Hom}(P, X)$ est réduit à un seul élément (resp. si $\text{Hom}(X, P)$ est réduit à un seul élément) pour tout objet X de \mathcal{C} .

Notons que 2 objets initiaux (resp. finaux) sont isomorphes : en effet, si P et P' sont initiaux, $\text{Hom}(P, P') = \{f_P\}$; $\text{Hom}(P', P) = \{f_{P'}\}$; $\text{Hom}(P, P) = \{\text{id}_P\}$ et $\text{Hom}(P', P') = \{\text{id}_{P'}\}$ d'où $f_P = f_{P'} = \text{id}_{P'}$ et $f_{P'} \circ f_P = \text{id}_P$.

Un objet à la fois final et initial s'appelle l'objet nul de la catégorie.

On le note 0 . Le morphisme nul est l'unique morphisme de $\text{Hom}(0, 0)$.

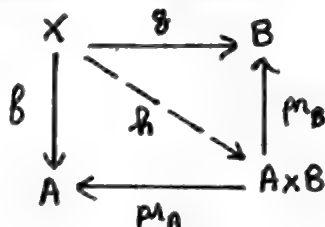
Le morphisme nul de A vers B est la composée des 2 morphismes (uniques) de $\text{Hom}(A, 0)$ et $\text{Hom}(0, B)$: $A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$

Dans une catégorie, beaucoup de notions sont liées par l'énoncé d'un problème universel, comme nous allons le voir :

3.3 Somme et produit de 2 objets : (*)

Soient A et B 2 objets. Le produit $A \times B$ est l'unique objet, à isomorphisme près, qui vérifie la propriété universelle suivante :

Il existe des flèches $p_A: A \times B \rightarrow A$ et $p_B: A \times B \rightarrow B$ telles que, pour toute flèches $f: X \rightarrow A$ et $g: X \rightarrow B$ il existe une flèche $h: X \rightarrow A \times B$ qui rende le diagramme suivant commutatif :



(*) tous ce qui suit est en fait donné par un ribe infini d'objets.

ie f et g se factorisent à travers $A \times B$.

Somme : La somme $A \oplus B$ est l'unique objet, à isomorphisme près, qui vérifie : " Il existe des flèches $i_A: A \rightarrow A \oplus B$ et $i_B: B \rightarrow A \oplus B$ telles que, pour toute flèches $f: X \rightarrow A \oplus B$ et $g: X \rightarrow B$ l'on puisse trouver une flèche unique $h: X \rightarrow A \oplus B$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow f & \searrow h & \downarrow i_B \\ A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus B \end{array} \quad \text{" (les notions de somme et produit coïncident dans le cas où il y a un nombre fini de termes.)$$

3.4 Noyau et conoyau

Soit \mathcal{C} une catégorie avec un objet nul, et $f \in \text{Hom}(A, B)$. Le noyau $\text{Ker } f$ de f est la solution du problème universel :

" $\text{Ker } f$ est un objet et $i \in \text{Hom}(\text{Ker } f, A)$ est fixé, de sorte que $f \circ i = 0$ et que tout morphisme $g \in \text{Hom}(C, A)$ tel que $f \circ g = 0$ se factorise de manière unique en $\tilde{g} \in \text{Hom}(C, \text{Ker } f)$ à travers $\text{Ker } f$.

$$\begin{array}{ccccc} C & & & & \\ & \searrow g & & & \\ & & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \swarrow \tilde{g} & \nearrow i & & \\ \text{Ker } f & & & & \end{array}$$

i est un monomorphisme puisque si $h, h' \in \text{Hom}(H, \text{Ker } f)$ et $i \circ h = i \circ h'$ on a $f \circ i \circ h = f \circ i \circ h' = 0$ d'où, d'après l'unicité du problème universel, $h = h'$.

Le conoyau $\text{Coker } f$ de $f \in \text{Hom}(A, B)$ est la solution du problème universel :

" $\text{Coker } f$ est un objet et $\pi \in \text{Hom}(B, \text{Coker } f)$ sont tels que $\pi \circ f = 0$ et pour tout morphisme $g \in \text{Hom}(B, C)$ tel que $g \circ f = 0$, il existe $\tilde{g} \in \text{Hom}(\text{Coker } f, C)$ unique rendant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Coker } f & & \\ & \nearrow \pi & & \downarrow \tilde{g} & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow g & & & \end{array}$$

commutatif :

3.5 Images et coimages.

3.6 Catégorie additive.

Une catégorie \mathcal{C} est dite additive si elle vérifie :

- 1) $\forall A, B$ objets de \mathcal{C} , $\text{Hom}(A, B)$ est un groupe abélien
- 2) La composition des morphismes est bilinéaire.
- 3) Il existe un objet nul de \mathcal{C} .
- 4) Il existe des sommes et des produits dans \mathcal{C} .

exercice : Si \mathcal{C} est une catégorie additive,
 g monomorphisme $\Leftrightarrow \text{Ker } g = 0$
 g épimorphisme $\Leftrightarrow \text{Coker } g = 0$

3.7 Catégorie abélienne.

Une catégorie abélienne est une catégorie additive telle qu'il existe des noyaux et des conoyaux ; Alors on peut montrer qu'il existe des images et des coimages et l'on impose la condition $\text{Im } f \simeq \text{coim } f$, l'isomorphisme canonique étant $A/\text{Ker } f \xrightarrow{\sim} \text{Im } f$.

exemple : On va voir que la catégorie des faisceaux de A -modules sur X est une catégorie abélienne (cf 3).

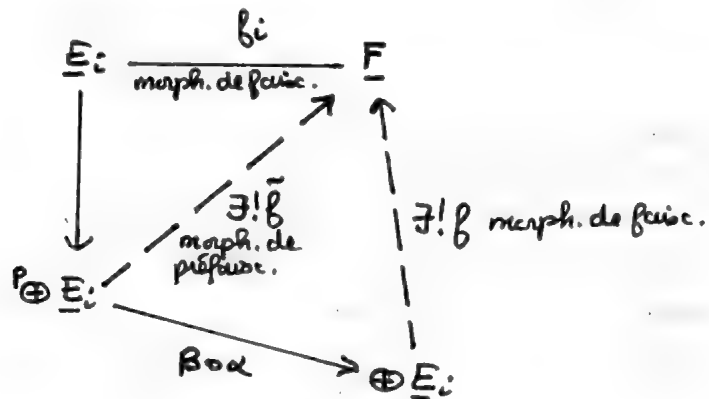
a) Prenons la catégorie Préfaisc des préfaisceaux de groupe. Si $\varphi: \underline{F} \rightarrow \underline{G}$ est un morphisme de préfaisceaux, on a :

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi & \text{ défini par } (\text{Ker } \varphi)(U) = \text{Ker } \varphi(U) \\ \text{Im } \varphi & \text{ " " } (\text{Im } \varphi)(U) = \text{Im } \varphi(U) \end{aligned}$$

où $\varphi(U): \underline{F}(U) \rightarrow \underline{G}(U)$ et $\varphi = \{\varphi(U)\}_{U \in X}$.

b) La catégorie \mathcal{C} des faisceaux de A -modules (cf 1.6) sur X est une catégorie abélienne. Si A est un faisceau d'anneaux sur X et si \underline{E}_i est une famille de A -modules, vérifions que la somme $\oplus \underline{E}_i$ existe.

Pour : $\bigoplus E_i \doteq$ faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \bigoplus E_i(U)$ et vérifions la propriété universelle des sommes directes. Pour tout morphisme de faisceaux $f_i : E_i \rightarrow F$, il existe un et un seul morphisme de préfaisceaux $\tilde{f} : \bigoplus E_i \rightarrow F$, où $\bigoplus E_i$ désigne le préfaisceau $U \mapsto \bigoplus E_i(U)$, et la propriété universelle du faisceau associé au préfaisceau (cf. 2.8) montre l'existence d'un unique morphisme de faisceaux f dans le diagramme :

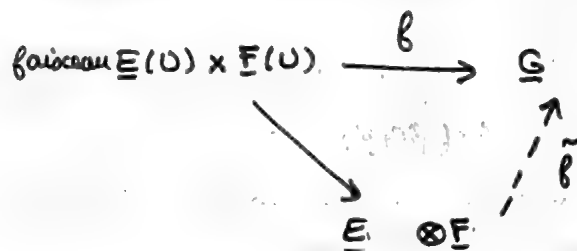


4. Constructions avec les faisceaux de \mathcal{A} -modules.

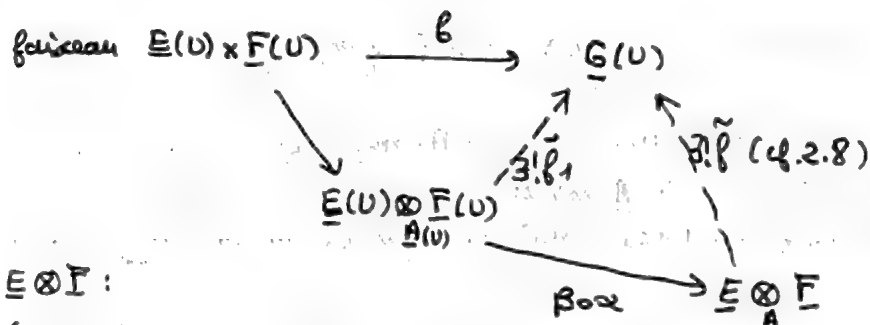
4.1 Produit tensoriel

Soient E et F deux \mathcal{A} -modules, où \mathcal{A} désigne un faisceau d'anneaux sur X . Le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto E(U) \otimes F(U)$ s'appelle le faisceau produit tensoriel de E par F . On le note $\mathcal{A}(U) \quad E \otimes_{\mathcal{A}} F$. Il vérifie la propriété universelle :

$\forall G = \mathcal{A}$ -module $\forall f$ bilinéaire $\exists ! \tilde{f}$ morphisme de faisceau /



(utiliser 2.8, et la démonstration est du type ci-dessus)
C'est vrai au niveau des préfaisceaux et :



Fibre de $E \otimes F$:

$$\text{On a } (E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x$$

(Cela provient de $\varinjlim M_i \otimes N_i = \varinjlim M_i \otimes \varinjlim N_i$)

Propriété d'adjonction: $\text{Hom}(\underline{E}, \text{Hom}(\underline{F}, \underline{G})) \simeq \text{Hom}(\underline{E} \otimes \underline{F}, \underline{G})$

(Cela provient de l'isomorphisme canonique $\text{Hom}(\underline{E}, \text{Hom}(\underline{F}, \underline{G})) \simeq \text{Bil}(\underline{E} \times \underline{F}, \underline{G})$)

4.2 Sous-modules, modules quotients

Soit \underline{E} un faisceau de \underline{A} -module. Un faisceau \underline{E}' tel que pour tout ouvert U de X $\underline{E}'(U) \subset \underline{E}(U)$ soit un morphisme de faisceau s'appelle un sous-faisceau de \underline{A} -module de \underline{E} .

Si \underline{E}' est un sous-faisceau de \underline{E} , on définit le faisceau quotient $\underline{E}/\underline{E}'$ comme le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \underline{E}(U)/\underline{E}'(U)$. $\underline{E}/\underline{E}'$ est alors un faisceau de \underline{A} -module et si $x \in X$, $\underline{E}'(U)$ la fibre de $\underline{E}/\underline{E}'$ au dessus de x est :

$$(\underline{E}/\underline{E}')_x = \underline{E}_x / \underline{E}'_x$$

Cela provient du fait que le foncteur limite inductive est exact. En effet, on a :

$$0 \rightarrow \underline{E}'(U) \rightarrow \underline{E}(U) \rightarrow \underline{E}(U)/\underline{E}'(U) \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{d'où} & 0 \rightarrow & \varinjlim \underline{E}'(U) & \rightarrow & \varinjlim \underline{E}(U) & \rightarrow & \varinjlim \underline{E}(U)/\underline{E}'(U) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \underline{E}'_x & & \underline{E}_x & & (\underline{E}/\underline{E}')_x \end{array}$$

$$\text{d'où } (\underline{E}/\underline{E}')_x = \underline{E}_x / \underline{E}'_x$$

$$\text{Notons au passage la formule } \varinjlim_{x \in U \subset X} \underline{E}(U)/\underline{E}'(U) = \frac{\varinjlim \underline{E}(U)}{\varinjlim \underline{E}'(U)}$$

4.3 Noyaux et images

Soit $\varphi: \underline{E} \rightarrow \underline{F}$ un morphisme de faisceaux de \underline{A} -modules. Le préfaisceau $U \mapsto \text{Ker } \varphi(U)$ ou $\varphi(U): \underline{E}(U) \rightarrow \underline{F}(U)$ et $\varphi = \{\varphi(U)\}_U$ est déjà un faisceau dont les fibres sont :

$$(\text{Ker } \varphi)_x = \text{Ker } \varphi_x$$

En effet, par passage à la limite inductive dans la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi(U) \rightarrow \underline{E}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \underline{F}(U)$$

on obtient :

$$0 \rightarrow (\text{Ker } \varphi)_x \rightarrow \underline{E}_x \xrightarrow{\varphi_x} \underline{F}_x$$

$\Delta m \varphi$ désigne le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \Delta m \varphi(U)$, et l'on a :

$$(\Delta m \varphi)_x = \Delta m \varphi_x$$

en passant à la limite inductive dans la suite exacte :

$$0 \rightarrow \ker \varphi(U) \rightarrow \underline{E}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \Delta m \varphi(U) \rightarrow 0$$

pour obtenir :

$$0 \rightarrow (\ker \varphi)_x \rightarrow \underline{E}_x \xrightarrow{\varphi_x} (\Delta m \varphi)_x \rightarrow 0$$

$$\text{ie } (\Delta m \varphi)_x \simeq \frac{\underline{E}_x}{\ker \varphi_x} \quad \text{car } (\ker \varphi)_x = \ker \varphi_x \\ \simeq \Delta m \varphi_x.$$

4.4 Suite exacte de faisceaux.

Soit $\underline{E}' \xrightarrow{\varphi} \underline{E} \xrightarrow{\psi} \underline{E}''$ un complexe de faisceaux (ie $\psi \circ \varphi = 0$)

Il existe un morphisme canonique de faisceaux

$$\Delta m \varphi \xrightarrow{i} \ker \psi$$

Notons $\text{pref } \Delta m \varphi$ le préfaisceau $U \mapsto \Delta m \varphi(U)$ qui sert à définir le faisceau image $\Delta m \varphi$. La propriété 2.8 donne l'existence d'un unique morphisme de faisceau i tel que :

$$\begin{array}{ccc} \text{pref } \Delta m \varphi & \xrightarrow{\tilde{i}} & \ker \psi \\ & \searrow \text{Box} & \nearrow i \\ & \Delta m \varphi & \end{array}$$

$$\text{ou } \tilde{i}(U) : \Delta m \varphi(U) \hookrightarrow \ker \psi(U)$$

Le morphisme est injectif car $\Delta m \varphi_x \xrightarrow{\tilde{i}_x} \ker \psi_x$ est injectif $\forall x \in X$
donc $\Delta m \varphi(U) \rightarrow \ker \psi(U)$ est injectif

si $s \mapsto 0$, on a $s_x = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow s = 0$.

De plus, $\Delta m \varphi \hookrightarrow \ker \psi$ est un monomorphisme (ie $\ker i = 0$)

On dira que la suite $\underline{E}' \xrightarrow{\varphi} \underline{E} \xrightarrow{\psi} \underline{E}''$ est exacte si $\Delta m \varphi \simeq \ker \psi$.

4.4.1 Proposition : $\underline{E}' \xrightarrow{\varphi} \underline{E} \xrightarrow{\psi} \underline{E}''$ est une suite exacte de faisceaux
ssi $\forall x \in X \quad \Delta m \varphi_x \simeq \ker \psi_x$

preuve : Il suffit donc de le montrer fibre à fibre. Voir prop. 1.5.

NB : En particulier, $\Delta m \varphi(U) \simeq \ker \psi(U) \quad \forall U \in X$

4.4.2. Proposition : Si $0 \rightarrow \underline{E}' \xrightarrow{\Psi} \underline{E} \xrightarrow{\Psi} \underline{E}''$ est une suite exacte de faisceaux, la suite

$$0 \rightarrow \underline{E}'(U) \rightarrow \underline{E}(U) \rightarrow \underline{E}''(U)$$

est exacte.
En d'autres termes, la fonction section sur U est exact à gauche.

preuve :

* La suite $0 \rightarrow \underline{E}'(U) \xrightarrow{\Psi(U)} \underline{E}(U) \xrightarrow{\Psi(U)} \underline{E}''(U)$ est un complexe car $\Psi \circ \Psi = 0$ implique $\Psi(U) \circ \Psi(U) = 0$.

* $\Psi(U)$ est injectif

* $\text{Ker } \Psi(U) = \text{Im } \Psi(U)$? On a déjà $\text{Im } \Psi(U) \subset \text{Ker } \Psi(U)$. Inversement, si

$\lambda \in \text{Ker } \Psi(U)$ $\lambda_x \in \text{Ker } \Psi_x = \text{Im } \Psi_x \Rightarrow \lambda_x = \Psi_x(\lambda_x)$ où $\lambda_x \in \underline{E}'_x$

donc, localement : $\lambda_{W_x} = \Psi(W_x) \lambda_{W_x}$

où $\lambda_{W_x} \in \underline{E}(W_x)$ et $\rho_x(\lambda_{W_x}) = \lambda_x$

$\lambda_{W_x} \in \underline{E}'(W_x)$ et $\rho_x(\lambda_{W_x}) = \lambda_x$

($\rho_x = \text{germe en } x$)

On a :

$$\Psi(W_x \cap W_y)(\lambda_{W_x}|_{W_x \cap W_y}) = \Psi(W_x \cap W_y)(\lambda_{W_y}|_{W_x \cap W_y})$$

||

$$\lambda|_{W_x \cap W_y}$$

et $\Psi(W_x \cap W_y)$ est injective, donc $\lambda_{W_x}|_{W_x \cap W_y} = \lambda_{W_y}|_{W_x \cap W_y}$, d'où que nous puissions recoller les sections locales

$$\lambda_{W_x} \in \underline{E}'(W_x)$$

pour obtenir $\lambda \in \underline{E}'(U)$ qui vérifie $\Psi(U)(\lambda) = \lambda$.

CQFD

Remarque 4.4.3 :

Le foncteur section sur un ouvert n'est pas exact à droite. On a le contre-exemple suivant :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{e} \mathbb{Z}$$

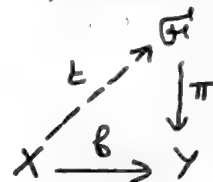
où \mathcal{O}^* est le faisceau multiplicatif défini par $\mathcal{O}^*(U) = \{ f \text{ holomorphes sur } U \text{ qui ne s'annulent pas sur } U \}$.

5. Image réciproque d'un faisceau par une application continue.

Soient $\beta: X \rightarrow Y$ continue et \mathcal{F} un faisceau de base Y , donné sous la forme d'un espace étalé $\pi: \mathcal{F} \rightarrow Y$.

$\beta^{-1}\mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \beta^{-1}\mathcal{F}(U) = \{ t: U \rightarrow \mathcal{F} \text{ continue} / \pi \circ t = \beta \}$$



Notons que ce préfaisceau est déjà un faisceau.

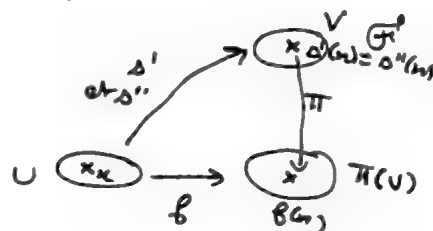
5.1 lemme : Soient s' et s'' deux sections de $\beta^{-1}\mathcal{F}$ au dessus d'un voisinage U de x .
Alors $s'_x = s''_x \in (\beta^{-1}\mathcal{F})_x \iff s'(x) = s''(x)$

preuve: (\Rightarrow) trivial

(\Leftarrow) $\exists U$ voisinage de x / $s'(u) = s''(u) = \pi^{-1} \circ \beta(u)$ (utiliser le fait que π est un homéomorphisme local)

cf FD

$$s'(U) \subset V \\ s''(U) \subset V$$



5.2 proposition : Il existe un morphisme $\bar{\beta}: \beta^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ d'espaces étalés au dessus de β , ie une application continue qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \beta^{-1}\mathcal{F} & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

où $\beta^{-1}\mathcal{F} \rightarrow X$ désigne l'espace étalé associé au faisceau $\beta^{-1}\mathcal{F}$.

preuve: On pose $\bar{\beta}(s'_x) = s'_x$. $\bar{\beta}$ fait commuter le diagramme, et $\bar{\beta}$ est continue:

$\forall \Omega$ ouvert de \mathcal{F} $\bar{\beta}^{-1}(\Omega)$ ouvert?

$$\forall s \in \beta^{-1}\mathcal{F}(U) \quad \bar{\beta}^{-1}(\bar{\beta}^{-1}(\Omega)) = \{ x \in X / s(x) = s_x \in \bar{\beta}^{-1}(\Omega) \}$$

$$= \{ x \in X / s(x) \in \Omega \} = s^{-1}(\Omega) \text{ est}$$

bien ouvert. cf FD

NB: $\bar{\beta}$ induit une bijection de $(\beta^{-1}\mathcal{F})_x$ sur $\mathcal{F}_{\beta(x)}$. (cf comm sur le faisceau)

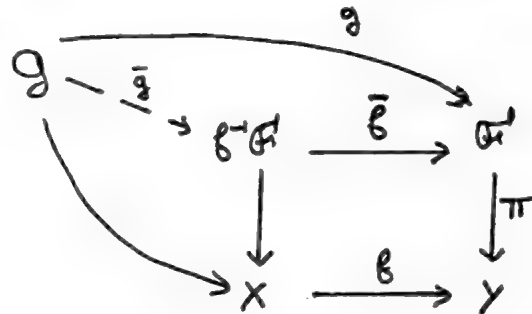
$$(\beta^{-1}\mathcal{F})_x \simeq \mathcal{F}_{\beta(x)}$$

5.3 Faisceau induit

Si $Y \subset X$ et si $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} X$ est un faisceau sur X , on note $\mathcal{F}|_Y = i^{-1}(\mathcal{F})$ où $i: Y \hookrightarrow X$. $i^{-1}(\mathcal{F})$ s'appelle le faisceau induit par \mathcal{F} sur Y et ce n'est autre que $\pi: \mathcal{F} \cap \pi^{-1}(Y) \rightarrow Y$ (On peut vérifier directement que $\mathcal{F}|_Y: \pi: \mathcal{F} \cap \pi^{-1}(Y) \rightarrow Y$ est un faisceau.)

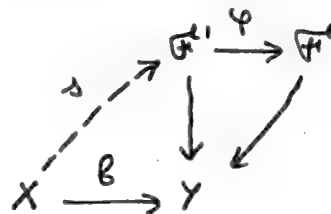
5.4 Problème universel : Le faisceau réciproque est solution du problème universel suivant :

"Pour tout faisceau \mathcal{G} sur X et pour tout morphisme $g: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ d'espaces étalés au dessus de β , g se factorise en \bar{g} de manière unique :



5.5 Fonctorialité de l'image réciproque.

β^{-1} est un foncteur de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens (resp. d'espaces vectoriels, resp. de A -modules dans la catégorie des $\beta^{-1}A$ -modules)* puisque si $\varphi: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ est un morphisme de faisceaux, où \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont 2 faisceaux de base Y , on définit :



$$\beta^{-1}(\varphi): \beta^{-1}\mathcal{F}' \rightarrow \beta^{-1}\mathcal{F} \\
 \delta \mapsto \varphi \circ \delta$$

de plus :

Proposition : β^{-1} est un foncteur exact, ie si $\beta: X \rightarrow Y$ est continue, si $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ et \mathcal{F}'' sont 3 faisceaux de base Y et si la suite de faisceaux

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}'' \rightarrow 0 \quad \text{est exacte,}$$

alors la suite de faisceaux :

$$(2) \quad 0 \rightarrow \beta^{-1}\mathcal{F}' \xrightarrow{\beta^{-1}u} \beta^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{\beta^{-1}v} \beta^{-1}\mathcal{F}'' \rightarrow 0 \quad \text{est exacte.}$$

preuve: Il suffit de la vérifier fibre à fibre d'après la prop. 4.4.1, ie que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{G}'_n \xrightarrow{(\beta'_n)_\lambda} \mathcal{G}_n \xrightarrow{(\beta''_n)_\lambda} \mathcal{G}''_n \rightarrow 0$$

est exacte.

La NB de la prop. 5.2 montre qu'il revient au même de vérifier que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{G}'_{\beta(n)} \rightarrow \mathcal{G}_{\beta(n)} \rightarrow \mathcal{G}''_{\beta(n)} \rightarrow 0$$

est exacte, ce qui est vrai si l'on s'aperçoit que, via les identifications, le morphisme $\mathcal{G}'_{\beta(n)} \rightarrow \mathcal{G}_{\beta(n)}$ n'est autre que $u_{\beta(n)}$, et le morphisme $\mathcal{G}_{\beta(n)} \rightarrow \mathcal{G}''_{\beta(n)}$ correspond à $v_{\beta(n)}$:

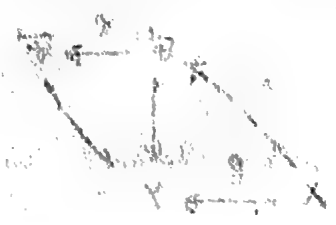
X

QED



Il est facile de voir que...

On peut aussi voir que... (The text is mirrored and difficult to read, but it seems to discuss the properties of the maps and spaces.)



On peut aussi voir que... (The text is mirrored and difficult to read, but it seems to discuss the properties of the maps and spaces.)

On peut aussi voir que... (The text is mirrored and difficult to read, but it seems to discuss the properties of the maps and spaces.)

6. Prolongement local d'une section (cf Godement, Théorie des faisceaux, 1.3.1 p 113 et 3.3 p 150)

Si $M \subset X$ et si \mathcal{F} est un faisceau de base X , notons $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des sections (continues) au dessus de M . On considère ici le faisceau \mathcal{F} comme un espace étalé au dessus de X . Si U est ouvert, $\mathcal{F}(U)$ désigne l'ensemble des sections de \mathcal{F} sur U .

6.1. Lemme

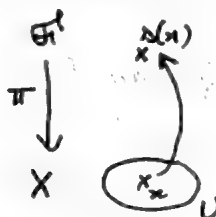
\mathcal{F} = faisceau de base X

$\{M_i\}_i$ = recouvrement de fermés localement fini de X

$$\forall s_i \in \mathcal{F}(M_i) \quad s_i|_{M_i \cap M_j} = s_j|_{M_i \cap M_j} \quad \exists! s \in \mathcal{F}(X) \quad s|_{M_i} = s_i$$

preuve: Ensemblistement, l'unicité est claire et s est bien définie (adopter résolument l'optique "un faisceau est un espace étalé pour le voir")
Il reste à montrer que s est continue.

$$\forall x \in X \quad s(x) \in \mathcal{F}$$



$s(x)$ est recapturée par une section θ de \mathcal{F} au dessus du voisinage ouvert U de x , ie
 $\theta \in \mathcal{F}(U)$ et $\theta(x) = s(x)$

U rencontre un nombre fini M_1, \dots, M_p de M_i , par hypothèse, et comme tous les M_i sont fermés, on peut supposer que $x \in M_1 \cap \dots \cap M_p$ quitte à prendre un ouvert U plus petit.

$\theta|_{U \cap M_1}$ est une section de \mathcal{F} au dessus de $U \cap M_1$ et $\theta(x) = s(x) = s_1(x)$

$s_1|_{M_1 \cap U}$ est aussi une section de \mathcal{F} au dessus de $U \cap M_1$ telle que $s_1(x) = s(x)$.

D'après l'unicité (locale) de telles sections qui coïncident en un point (cela provient de l'homéomorphisme local $\pi: \mathcal{F} \rightarrow X$ qui donne naissance à un homéomorphisme local $\pi: \mathcal{F} \cap \pi^{-1}(Y) \rightarrow Y$ lorsque $Y \subset X$) on obtient l'existence d'un voisinage Ω_1 de x dans X , Ω_1 ouvert, tel que:

$$\forall y \in \Omega_1 \cap M_1 \cap U \quad s_1(y) = \theta(y)$$

Ainsi :

$$\forall y \in U \cap \left(\bigcap_{i=1}^p \Omega_i \right) \quad \theta(y) = s(y)$$

$$\text{puisque } \forall y \in U \cap \left(\bigcap_{i=1}^p \Omega_i \right) \quad \exists i \quad y \in M_i \Rightarrow y \in \Omega_i \cap M_i \cap U \\ \Rightarrow s(y) = s_i(y) = \theta(y).$$

Finalement s est continue en x .

6.2 Rappels de topologie

6.2.1 Un espace topologique est dit paracompact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement plus fin localement fini.

6.2.2 Un espace topologique est dit normal s'il est séparé et si pour tout recouvrement localement fini d'ouverts $\{U_i\}_i$, il existe un recouvrement ouvert $\{V_i\}_i$ tel que $\bar{V}_i \subset U_i$.

(cf. Schwartz Topologie générale et analyse fonctionnelle, chap. XXII)

Alors :

- 1) métrisable \Rightarrow paracompact \Rightarrow normal
- 2) Tout fermé d'un paracompact est paracompact
- 3) Tout fermé d'un paracompact admet un système fondamental de voisinages paracompacts.

6.3 Théorème du prolongement des sections

\mathcal{F} = faisceau de base X

S = sous-ensemble de X admettant un système fondamental de voisinages paracompacts

Alors toute section $s \in \mathcal{F}(S)$ se prolonge en une section sur un voisinage de S .

preuve :

On peut supposer X paracompact car S admet un syst. fond. de vois. paracompacts.

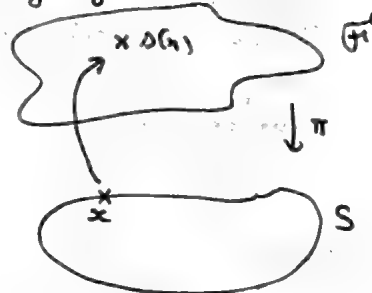
Recouvrons S par des ouverts U_i tels que $\exists s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ $s = s_i$ sur $S \cap U_i$.

(Un tel recouvrement existe, puisque $s \in \mathcal{F}(S)$

et il existe $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ / $s_i(x) = s(x)$, donc

s et s_i coïncident en x , donc sur tout

$S \cap U_i$ d'après l'unicité des sections sur $S \cap U_i$ qui valent $s(x)$ en x (cf. prop. 2.2))



$\bigcup U_i$ est un voisinage de S et l'on peut supposer que X est paracompact inclus dans $\bigcup U_i$. Sous cette nouvelle hypothèse, on a $X = \bigcup U_i$.

On peut supposer que le recouvrement $\{U_i\}$ est localement fini de X quitte à en restreindre le nombre et la finesse (cf. 6.2.1)
Comme X est normal, il existe un recouvrement $\{V_i\}$ de X tel que $\bar{V}_i \subset U_i$.

Soit $W = \{x \in X / x \in \bar{V}_i \cap \bar{V}_j \Rightarrow s_i(x) = s_j(x)\}$

Alors $S \subset W$ et le lemme 6.1 montre qu'il existe $s \in \mathcal{F}(W)$ qui prolonge $s \in \mathcal{F}(S)$ (prendre $M_i = \bar{V}_i$)

Montrons que W est un voisinage de S

$\forall x \in S \exists W_x$ voisinage ouvert de x qui, parmi les \bar{V}_i , ne rencontre que $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_p$.

Quitte à diminuer W_x , on peut supposer que $x \in \bar{V}_1 \cap \dots \cap \bar{V}_p$ et que $W_x \subset \bar{V}_1 \cap \dots \cap \bar{V}_p$ (car $\bar{V}_i \subset U_i$)

$s_1(x) = \dots = s_p(x)$ et $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ donc, d'après l'unicité des sections qui coïncident en un point x , il existe W_x voisinage ouvert de x assez petit tel que $s_1 = \dots = s_p$ sur W_x . Mais alors $W_x \subset W$ par définition de W .

CQFD

6.4 Corollaire

\mathcal{F} = faisceau sur X

S = partie de X admettant un système fondamental de voisinages paracompacts.

Alors

$$\mathcal{F}(S) = \varinjlim_{S \subset U} \mathcal{F}(U)$$

preuve:

$\mathcal{F} : \varinjlim_{S \subset U \in X} \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$ est surjective d'après le Th. 6.3

$$s \longmapsto s|_S$$

Si $t, s \in \mathcal{F}(U)$ vérifient $t(x) = s(x) \quad \forall x \in S$, alors pour tout $x \in S$ il existe un voisinage W_x de x tel que $t|_{W_x} = s|_{W_x}$. Ainsi $t = s$ sur un voisinage $W = \bigcup_{x \in S} W_x$ de S donc $t = s$.

CQFD

Remarque: le corollaire 6.4 s'applique notamment:

* si X est paracompact et S fermé, [cf 6.2 3]

(ou * si X est métrisable et S quelconque.

7. Suite exacte associée à un sous-espace localement fermé
(cf. Godement 2.9 p 138)

7.1 Définition : On dit qu'un sous-espace Y de X est localement fermé s'il vérifie l'une des 2 propriétés équivalentes suivantes :

- i) $\forall a \in Y \exists U$ voisinage ouvert de a dans X $U \cap Y$ fermé dans U
- ii) $Y = U \cap F$ où U ouvert de X et F fermé de X .

Théorème 7.2 : Soit A un ensemble localement fermé de X .

$\forall \mathcal{L}$ faisceau de groupes abéliens sur A

$\exists ! \mathcal{L}^X$ faisceau de groupes abéliens sur X qui vérifie les 2 conditions :

$$(1) \quad \mathcal{L}^X|_A \cong \mathcal{L}$$

$$(2) \quad \mathcal{L}^X|_{X \setminus A} \cong 0$$

\mathcal{L}^X s'appellera faisceau prolongé par 0 du faisceau \mathcal{L} sur A .

preuve :

* Unicité : Si \mathcal{L}^X existe et vérifie (1) et (2), on peut définir l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}^X(U) &\longrightarrow \mathcal{L}(UNA) \\ s &\longmapsto s|_{UNA} \end{aligned}$$

pour tout ouvert U de X . φ est injective car $\mathcal{L}^X(x) = 0$ si $x \in X \setminus A$, de sorte que $\mathcal{L}^X(U) \cong \text{Im } \varphi$.

$$\text{Im } \varphi = \{ s \in \mathcal{L}(UNA) / s \text{ reste continue lorsqu'elle est prolongée par } 0 \text{ dans } U \setminus (UNA) \}$$

Si $s \in \text{Im } \varphi$, $|s| \doteq \{ x \in UNA / s(x) \neq 0 \}$ est fermé dans U (et non seulement de UNA) car UNA est choisi fermé dans U .

$|s|$ désigne ici le support de s . (cf * page 30)

Montrons que :

$$\text{Im } \varphi = \{ s \in \mathcal{L}(UNA) / |s| \text{ fermé dans } U \}$$

Pour cela, vérifions que si $s \in \mathcal{L}(UNA)$ est de support $|s|$ fermé dans U , alors $s \in \text{Im } \varphi$, ce $\begin{cases} s \text{ sur } UNA \\ 0 \text{ sur } U \setminus (UNA) \end{cases}$ définit une section continue

de \mathcal{L}^X sur U .

Si $x \in A \cap U$, $s(x) \in \mathcal{L}_x$. \exists section \tilde{s} de \mathcal{L}^X sur un voisinage V de x , $\tilde{s} \in \mathcal{L}^X(V)$ telle que $\tilde{s}(x) = s(x)$ (puisque \mathcal{L}^X est supposé exister).

Quitte à diminuer V , on aura $\tilde{s}|_{V \cap A} = s|_{V \cap A}$ d'après (1) et $\tilde{s} = 0$ en dehors de $V \cap A$ d'après (2).

Soit $\tilde{s} \in \mathcal{L}^X(U \setminus U \cap A)$ la section nulle sur l'ouvert $U \setminus (U \cap A)$

(*) $\tilde{s} \in \mathcal{L}^X(V)$ où V parcourt l'ensemble d'ouverts de $U \cap A$.
Il est clair que ces sections se recollent en une section $\tilde{s} \in \mathcal{L}^X(U)$ telle que $\varphi(\tilde{s}) = s$, d'où l'expression de $\Omega \cap \Gamma$.

Conclusion : Si \mathcal{L}^X existe, $\mathcal{L}^X(U) = \{s \in \mathcal{L}(U \cap A) / |s| \text{ fermé dans } U\}$

* Existence : Posons pour tout $U \in \mathcal{X}$, $U \neq \emptyset$,

$$\mathcal{L}^X(U) = \{s \in \mathcal{L}(U \cap A) / |s| \text{ fermé dans } U\}$$

$$\text{et } \mathcal{L}^X(\emptyset) = 0.$$

Montrons que \mathcal{L}^X est un faisceau de groupes abéliens vérifiant (1) et (2).
 \mathcal{L}^X est clairement un préfaisceau de groupes abéliens pour les restrictions :

$$V \subset U \quad \mathcal{L}(U \cap A) \longrightarrow \mathcal{L}(V \cap A)$$

$$s \longmapsto s|_V \quad |s|_V = V \cap |s| = \text{fermé dans } V \text{ car } |s| \text{ est fermé dans } U \text{ et } V \subset U.$$

Recollement : Si $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, $s_{\alpha} \in \mathcal{L}^X(U_{\alpha})$ / $s_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap B} = s_{\beta}|_{U_{\alpha} \cap B}$, $s_{\alpha} \in \mathcal{L}(U_{\alpha} \cap A)$ coïncident sur les intersections, et comme \mathcal{L} est un faisceau sur A les s_{α} se recollent en une unique section $s \in \mathcal{L}(U \cap A)$.

De plus $|s|$ est fermé dans U puisque

$$|s| = \bigcup_{\alpha} \{x \in A \cap U / s_{\alpha}(x) \neq 0\} = \bigcup_{\alpha} |s_{\alpha}|$$

est encore un fermé bien que réunion infinie de fermés. En effet, si $x \notin |s|$ $\forall \alpha$ $s_{\alpha}(x) = 0 \Rightarrow s_1(x) = 0 \Rightarrow s_1$ est la section nulle sur un voisinage V_1 de x (cf. la section nulle d'un faisceau est bien continue). Par suite $s_1(y) = 0$ pour tout $y \in V_1$ puisque les s_{α} coïncident sur les intersections. Donc $V_1 \subset |s|$.

Il reste à vérifier (1) et (2).

$$(1) \mathcal{L}^X|_{X \setminus A} = 0$$

Si $x \in X \setminus \bar{A}$ alors $\mathcal{L}_x^X = 0$. En effet, $s_x \in \mathcal{L}_x^X$ provient d'une section $s \in \mathcal{L}^X(V_x)$ où

V_x est un voisinage de x que l'on peut

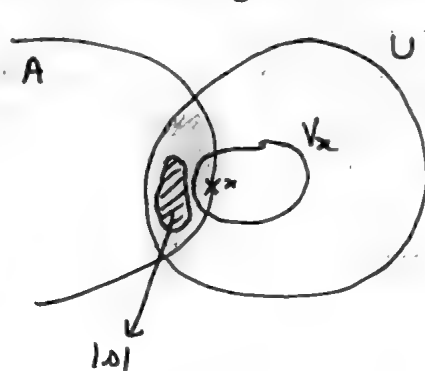
choisir inclus dans $X \setminus \bar{A}$, de sorte que $V_x \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{L}^X(V_x) = \mathcal{L}(V_x \cap A) = 0$

car $V_x \cap A = \emptyset$ et $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$.



Ainsi $\mathcal{L}^X|_{X \setminus \bar{A}} = 0$.

Preons maintenant $x \in \bar{A} \setminus A$, U un voisinage ouvert de x dans X et $s \in \mathcal{L}^X(U)$. Alors $s \in \mathcal{L}(U \cap A)$ est de support $|s|$ fermé dans U , et $|s| \subset A$. Donc $x \notin |s|$ (car $|s| \subset A$) et comme $|s|$ fermé dans U , il existe un voisinage V_x ouvert de x disjoint de $|s|$ dans U .



Donc $s|_{V_x} = 0$.

Ainsi $\mathcal{L}^X|_{\bar{A} \setminus A} = 0$, ce qui prouve (1).

(2) $\mathcal{L}^X|_A \simeq \mathcal{L}$

$\forall x \in A \quad \exists U$ vois. ouv. de x / $A \cap U$ fermé dans U (cf A loc. fermé)

Ainsi, $\forall V \subset U$ V vois. ouv. de x $\mathcal{L}^X(V) = \mathcal{L}(V \cap A)$ (puisque $|s|$ fermé dans $V \Rightarrow |s|$ fermé dans $V \cap A$ dans ce cas)

En passant à la limite inductive, on obtient

$$\mathcal{L}_x^X \simeq \mathcal{L}_x \quad \text{pour } \forall x \in A$$

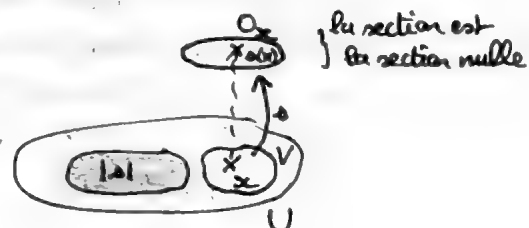
Il reste à vérifier que l'identification $\mathcal{L}^X|_A \simeq \mathcal{L}$ respecte les topologies des 2 faisceaux, ou encore que les sections au dessus de $U \cap A$ du faisceau $\mathcal{L}^X|_A$ sont aussi celles de \mathcal{L} .

Posons $\mathcal{M} = \mathcal{L}^X|_A$. Alors $\mathcal{M}(U \cap A) \simeq \mathcal{L}(U \cap A)$ puisque toutes les sections de \mathcal{M} au dessus de $U \cap A$ prolongées par 0 dans $U \setminus U \cap A$ sont continues (cf $A \cap U$ fermé de U + même argument que (*))

QFD

* (Parentèse :) Si \mathcal{L} est un faisceau de groupes abéliens sur X et si s est une section de \mathcal{L} au dessus d'une partie U de X , on appelle support de s , et l'on note $|s|$, l'ensemble $|s| = \{x \in U / s(x) \neq 0\}$.
On rappelle (cf. cours sur les faisceaux) que la section nulle $\tilde{0}$ de \mathcal{L} est
1) bien une section globale de \mathcal{L} , continue 2) définit un ouvert de \mathcal{L} appelé encore "section nulle" (à savoir $\{0_x / x \in X\}$ où 0_x sont les zéros des groupes \mathcal{L}_x)
Le 1) montre qu'une section nulle en un point est nécessairement nulle au voisinage de ce point, de sorte que le support $|s|$ de s soit un fermé de U .

En effet, si $x \notin |s|$ on a $s(x) = 0$ donc $s = \tilde{0}$ sur un voisinage V de x , donc $V \subset U \setminus |s|$ et finalement $U \setminus |s|$ est un ouvert.



Du théorème 7.2, on déduit :

Théorème 7.3 : Soit A un sous-espace de X . Les 2 propriétés suivantes sont équivalentes :

(LF1) A localement fermé

(LF2) $\forall \mathcal{L}$ faisceau de groupes abéliens sur X $\exists ! \mathcal{L}_A$ faisceau de groupes abéliens sur X tel que

$$(1) \mathcal{L}_A|_A \simeq \mathcal{L}|_A$$

$$(2) \mathcal{L}_A|_{X \setminus A} \simeq 0$$

preuve :

(LF2) \Rightarrow (LF1) Soit $\mathcal{L} = \mathbb{Z} =$ faisceau constant sur X .

On obtient ainsi un faisceau \mathcal{L}_A tel que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_A|_A = \mathbb{Z}|_A \\ \mathcal{L}_A|_{X \setminus A} \simeq 0 \end{cases}$$

$\forall a \in A \exists$ section de \mathcal{L}_A $s \in \mathcal{L}_A(U)$ où U voisin de a / $s(a) = 1$.

Une telle section vaut toujours 1 sur un voisinage de a (en effet, $s|_{U \cap A}$ s'identifie à une section de $\mathbb{Z}|_A$ qui vaut 1 en a , et l'on sait qu'une section d'un faisceau constant G sur X n'est autre qu'une application localement constante de X dans G), plus précisément sur $U \cap A$ si U est choisi assez petit.

Ainsi :

$$\begin{cases} s = 0 & \text{sur } U \setminus A \\ s = 1 & \text{sur } U \cap A \end{cases}$$

donc :

$U \setminus U \cap A = \{x \in U / s(x) = 0\} =$ ouvert de U (cf 1a) fermé dans U montré à * page 30 \Leftarrow toute section s s'annulant en un point x de U s'annule également sur un voisinage de x , ie coïncide avec la section nulle)

Ainsi $U \cap A$ est fermé dans $U \Rightarrow A$ est localement fermé.

(LF1) \Rightarrow (LF2) Si A est localement fermé, on prolonge le faisceau restreint $\mathcal{L}|_A$ par 0 grâce au théorème 7.2 pour obtenir $(\mathcal{L}|_A)^X$.

On pose :

$$\mathcal{L}_A \doteq (\mathcal{L}|_A)^X$$

L'unicité provient de celle du Th. 7.2.

CQFD

|| Proposition 7.4 : Si A est ouvert et si \mathcal{L} est un faisceau sur X , alors \mathcal{L}_A est un sous-faisceau de \mathcal{L} .

preuve : Prenons le point de vue des espaces étalés.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_A & \hookrightarrow & \mathcal{L} \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & X & \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{L} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{L}_{A,x} \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}_{A,x} = \begin{cases} \mathcal{L}_x & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On munit \mathcal{L}_A de la topologie induite par \mathcal{L} . Il suffit de vérifier que $\pi : \mathcal{L}_A \rightarrow X$ est un faisceau, ie π est encore un homéomorphisme local.

Soit $l \in \mathcal{L}_A$ et $\pi(l) = x$.

1) Si $x \in A$, $\exists V$ voisinage de x $V \subset A$ $\exists W$ vois. de $l \subset \mathcal{L}$ / $\pi : W \rightarrow V$ homéomorphisme. Alors $V \subset A \Rightarrow W \subset \mathcal{L}_A$.

2) Si $x \notin A$, $l = 0_x \in \mathcal{L}_x$ et la section nulle est un ouvert de \mathcal{L} contenant $l = 0_x$, de sorte que l'on puisse trouver un ouvert Ω inclus dans W , $0_x \in \Omega$, tel que

$$\pi : \Omega \rightarrow V = \pi(\Omega) \text{ soit un homéomorphisme.}$$

Alors : $\pi : \Omega = \Omega \cap \mathcal{L}_A \rightarrow V$ est aussi un homéomorphisme.

Q.F.D

Si B est fermé, la prop. 7.4 est fautive. Prenons $A = X \setminus B$, et considérons la suite exacte de faisceaux :

$$\mathcal{L}_A \hookrightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{L}_A \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} x \in A \Rightarrow \left(\mathcal{L}/\mathcal{L}_A \right)_x = \mathcal{L}_x / \mathcal{L}_{A,x} = 0 \\ x \notin A \Rightarrow \left(\mathcal{L}/\mathcal{L}_A \right)_x = \mathcal{L}_x \end{cases}$$

Fibre à fibre, le faisceau $\mathcal{L}/\mathcal{L}_A$ ressemble à \mathcal{L}_B .

$$\mathcal{L}_B(U) = \{s \in \mathcal{L}|_B(U \cap B) \mid |s| \text{ fermé dans } U\}$$

$$(1) \quad \mathcal{L}_B(U) = \mathcal{L}|_B(U \cap B) \quad (\text{car } |s| \text{ fermé dans } U \cap B \text{ et } B \text{ fermé} \Rightarrow |s| \text{ fermé dans } U)$$

On en déduit un morphisme de faisceaux $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_B$, à savoir :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(U): & \mathcal{L}(U) & \longrightarrow \mathcal{L}_B(U) \\ & s & \longmapsto s|_{U \cap B} \end{array}$$

* Épimorphisme : on le montre fibre à fibre. Si $x \in B$, en passant à la limite inductive dans (1), on obtient $(\mathcal{L}_B)_x = (\mathcal{L}|_B)_x$. Si $x \notin B$, $(\mathcal{L}_B)_x = 0_x$ donc φ_x est trivialement surjective (l'antécédent est le germe nul).

* Ker φ ? $\text{Ker } \varphi(U) = \{s \in \mathcal{L}(U) \mid s|_{U \cap B} = 0\}$

Montrons que $\text{Ker } \varphi(U) = \mathcal{L}_A(U)$ où $\mathcal{L}_A(U) = \{s \in \mathcal{L}|_A(U \cap A) \mid |s| \text{ fermé de } U\}$.
Si $s \in \text{Ker } \varphi(U)$, $|s| \subset U \setminus (U \cap B) \Rightarrow |s| \subset A \cap U$ donc $s \in \mathcal{L}|_A(U \cap A)$ et $|s|$ est fermé dans U (car $s \in \mathcal{L}(U)$).

Réciproquement, si $s \in \mathcal{L}_A(U)$ (sous-entendu, $s \in \mathcal{L}|_A(U \cap A)$ est prolongé sur U par 0) alors $s \in \mathcal{L}(U)$ et clairement $s|_{U \cap B} = 0$.

Finalement, nous avons la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_A \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}_B \longrightarrow 0$$

On vient de montrer que :

Théorème 7.5 : Si A est un fermé de X , on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{X \setminus A} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_A \longrightarrow 0$$

Corollaire 7.6 : Si A est localement fermé, $A = U \cap F$ où U ouvert et F fermé, et on a les suites exactes.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_A \longrightarrow \mathcal{L}_F \longrightarrow (\mathcal{L}_F)_{X \setminus U} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (\mathcal{L}_U)_{X \setminus F} \longrightarrow \mathcal{L}_U \longrightarrow \mathcal{L}_A \longrightarrow 0$$

preuve: Si A et B sont localement fermés dans X , on a

$$\boxed{(\mathcal{L}_A)_B = \mathcal{L}_{A \cap B}} \quad (1)$$

En effet, par définition $\begin{cases} (\mathcal{L}_A)_B|_B \simeq \mathcal{L}_A|_B & (2) \\ (\mathcal{L}_A)_B|_{X \setminus B} \simeq 0 & (3) \end{cases}$ où $\begin{cases} \mathcal{L}_A|_A \simeq \mathcal{L}|_A \\ \mathcal{L}_A|_{X \setminus A} \simeq 0 \end{cases}$

(2) donne:

* α) $\mathcal{L}_A|_B|_{A \cap B} \simeq (\mathcal{L}_A|_B)|_{A \cap B} \simeq \mathcal{L}_A|_{A \cap B} \simeq \mathcal{L}|_{A \cap B}$ en utilisant 2 fois la propriété (R):

(R): Fonctorialité de l'image réciproque $g^{-1}(\beta^{-1}\mathcal{F}) \quad \beta^{-1}\mathcal{F} \quad \mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccccc} & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ g^{-1}\beta^{-1} = (\beta \circ g)^{-1} & & A \cap B & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

ie $(\mathcal{F}'|_A)|_{A \cap B} \simeq \mathcal{F}'|_{A \cap B}$, en particulier. (on peut le montrer directement en partant de la définition du faisceau restreint $\mathcal{F}'|_A$ qui ne fait pas intervenir les images réciproques $\beta^{-1}(\mathcal{F})$.)

* β) $(\mathcal{L}_A)_B = 0$ en dehors de $A \cap B$ car:

\nearrow si $x \notin B$ $(\mathcal{L}_A)_{B,x} = 0$ d'après (3)

\searrow si $x \in B$ $(\mathcal{L}_A)_{B,x} \simeq \mathcal{L}_A|_{B,x} = 0$ car $x \notin A$

α et β) montrent que $(\mathcal{L}_A)_B = \mathcal{L}_{A \cap B}$ (1).

Cela étant, il est facile de montrer le corollaire 7.6 puisque tout localement fermé A s'écrit $A = U \cap F$ où U ouvert et F fermé, puisque U et F sont localement fermés et donc:

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{U \cap F} = (\mathcal{L}_U)_F = (\mathcal{L}_F)_U$$

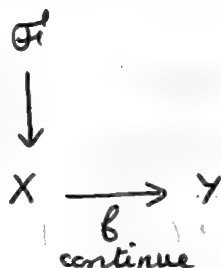
Le Th 7.5 donne les 2 suites exactes:

$$0 \longrightarrow (\mathcal{L}_F)_U \longrightarrow \mathcal{L}_F \longrightarrow (\mathcal{L}_F)_{X \setminus U} \longrightarrow 0$$

et $0 \longrightarrow (\mathcal{L}_U)_{X \setminus F} \longrightarrow \mathcal{L}_U \longrightarrow (\mathcal{L}_U)_F \longrightarrow 0$

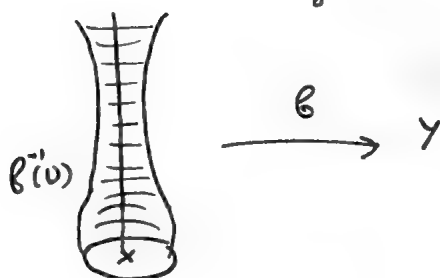
8. Image directe d'un faisceau.

Soient \mathcal{F} un faisceau de base X et $\beta: X \rightarrow Y$ une application continue. La correspondance $U \mapsto \beta_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\beta^{-1}(U))$ définit un faisceau sur Y (ie un préfaisceau complet) qui s'appelle l'image directe de \mathcal{F} par β .



La fibre de $\beta_*(\mathcal{F})$ au dessus de $y \in Y$ est :

$$\beta_*(\mathcal{F})_y = \varinjlim_{y \in U} \mathcal{F}(\beta^{-1}(U)) = \text{"objet global"}$$



Proposition 8.1 : Si β est une application fermée (par exemple, si β est propre) et si \mathcal{F} est un faisceau de base X , on a :

$$(\beta_* \mathcal{F})_y = \varinjlim_{\beta^{-1}(y) \subset V \subset X} \mathcal{F}(V)$$

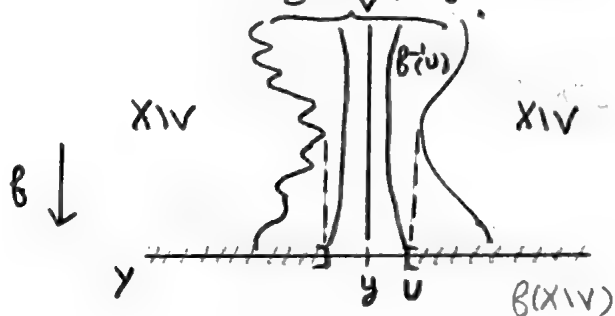
preuve :

$$\begin{array}{ccc} (\beta_* \mathcal{F})_y = \varinjlim_{y \in U} \mathcal{F}(\beta^{-1}(U)) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \varinjlim_{\beta^{-1}(y) \subset V} \mathcal{F}(V) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \text{ } & \text{(où } s \in \mathcal{F}(\beta^{-1}(U)) \text{)} \end{array}$$

\mathcal{F} sera bijective si l'on arrive à montrer que :

(*) $\forall V$ voisinage de $\beta^{-1}(y)$ dans X $\exists U$ voisinage de y dans Y / $\beta^{-1}(U) \subset V$

(l'injectivité est triviale, et la surjectivité provient de (*))



Il suffit de prendre $U = Y \setminus \beta(X \setminus V)$:

1) $\beta^{-1}(U) \subset V$ car $\beta^{-1}(Y \setminus \beta(X \setminus V)) = X \setminus \beta^{-1}\beta(X \setminus V) \subset X \setminus (X \setminus V) \subset V$

2) $y \in U$, sinon il existe $x \in X \setminus V$ tel que $\beta(x) = y$, ce qui est absurde car V est un voisinage ouvert de $\beta^{-1}(y)$, donc de x .

3) $U = Y \setminus \beta(X \setminus V)$ est ouvert dans Y car β est fermée. CQFD

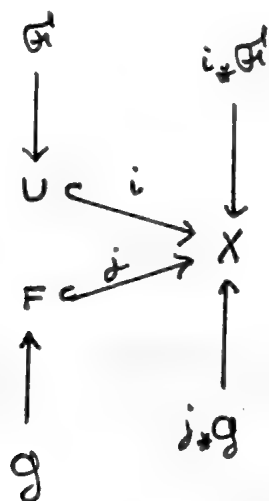
8.1.1 Corollaire : Si $\beta : X \rightarrow Y$ est fermée et X paracompact, pour tout faisceau F de base X on a :

[En effet, β fermée $\Rightarrow (\beta_* F)_E = \varinjlim_{\beta^{-1}(E) \subset V} F(V)$ et X paracompact implique $\varinjlim_{\beta^{-1}(E) \subset V} F(V) = F(\beta^{-1}(E))$]

$$(\beta_* F)_E = F(\beta^{-1}(E))$$

8.2 Remarque

Soient U (resp. F) un ouvert (resp. un fermé) de X , $i : U \hookrightarrow X$ et $j : F \hookrightarrow X$ les inclusions canoniques, \mathcal{F} un faisceau de base U et \mathcal{G} un faisceau de base F .



Si Ω est un ouvert de X , on a

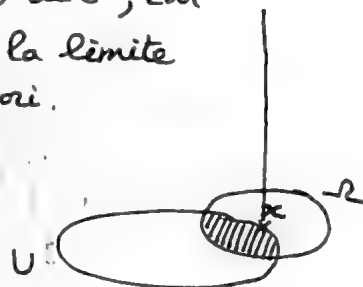
$$\begin{cases} i_* \mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{G}(\Omega \cap U) \\ j_* \mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{G}(\Omega \cap F) \end{cases}$$

$j_* \mathcal{G} = \mathcal{G}^X =$ prolongé par 0 du faisceau \mathcal{G} (cf 7.2) puisque l'on a :

$$j_* \mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{G}(\Omega \cap F) = \{ s \in \mathcal{G}(\Omega \cap F) / \text{si } \Omega \text{ fermé dans } \Omega \}$$

En effet, Ω fermé dans $\Omega \cap F$ et F fermé $\Rightarrow \Omega$ fermé dans Ω

Attention! $i_* \mathcal{F}$ n'est pas le prolongement par 0 de \mathcal{F} , car si $x \in \bar{U} \setminus U$, la fibre de $i_*(\mathcal{F})$ au dessus de x est la limite inductive des $\mathcal{F}(U \cap \Omega)$, et n'est pas nulle a priori.



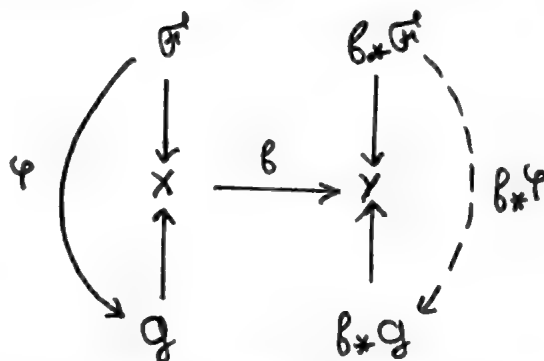
Proposition 8.3 : Si $f: X \rightarrow Y$ est continue, la correspondance $\mathcal{F} \mapsto f_* \mathcal{F}$ définit un foncteur exact à gauche de la catégorie des faisceaux sur X dans la catégorie des faisceaux sur Y .

preuve :

Si $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux de base X , on définit $f_* \varphi: f_* \mathcal{F} \rightarrow f_* \mathcal{G}$ en posant

$$(f_* \varphi)(U) = \varphi(f^{-1}(U)) : f_* \mathcal{F}(U) \doteq \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \longrightarrow f_* \mathcal{G}(U) \doteq \mathcal{G}(f^{-1}(U))$$

pour tout ouvert U de Y .



f_* s'appelle le foncteur (covariant) image directe.

Montrons qu'il est exact à gauche : Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ une suite exacte de faisceaux sur X . Pour tout ouvert U de Y , la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \xrightarrow{\varphi(f^{-1}(U))} \mathcal{G}(f^{-1}(U)) \xrightarrow{\psi(f^{-1}(U))} \mathcal{H}(f^{-1}(U))$$

est exacte, puisque le foncteur section sur l'ouvert $f^{-1}(U)$ est exact à gauche.
En passant à la limite inductive, et compte tenu du fait que le foncteur limite inductive est exact, on obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow (f_* \mathcal{F})_y \xrightarrow{(f_* \varphi)_y} (f_* \mathcal{G})_y \xrightarrow{(f_* \psi)_y} (f_* \mathcal{H})_y \quad (\text{où } y \in Y)$$

La prop. 4.4.1 montre qu'alors la suite :

$$0 \rightarrow f_* \mathcal{F} \xrightarrow{f_* \varphi} f_* \mathcal{G} \xrightarrow{f_* \psi} f_* \mathcal{H} \quad \text{est une suite exacte de faisceaux.}$$

\square

Proposition 8.4 : Soit A localement fermé dans X . Avec les notations de la section 7, on a :

(1) La correspondance $\mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{L}_A$ définit un foncteur exact de la catégorie des faisceaux de base X dans elle-même.

(2) La correspondance $\mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{L}^*$ définit un foncteur exact de la catégorie des faisceaux de base A dans celle des faisceaux de base X .

preuve :



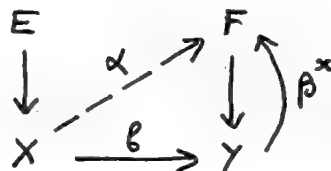
9. Comorphismes

Proposition 9.1 : Soient E (resp. F) un faisceau de base X (resp. Y) et $\beta: X \rightarrow Y$ continue.
Alors :

$$\text{Hom}(\beta^{-1}F, E) = \text{Hom}(F, \beta_* E)$$

preuve :

①



$$\text{Hom}(\beta^{-1}F, E) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(F, \beta_* E)$$

$$\varphi = \{\varphi(U)\}_U \longmapsto \psi = \{\psi(V)\}_V$$

$$\text{où si } V \in Y \quad \psi(V): F(V) \longrightarrow \beta_* E(V) = E(\beta^{-1}(V))$$

$$\lambda \longmapsto \psi(V)\lambda = \varphi(\beta^{-1}(V)) \quad (\lambda \circ \beta)$$

$$\text{où } \varphi(U): \beta^{-1}F(U) \longrightarrow E(U) \quad \text{et } \lambda \circ \beta \in \beta^{-1}F(U).$$

② $\text{Hom}(F, \beta_* E) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(\beta^{-1}F, E)$

$$\psi = \{\psi(V)\}_V \longmapsto \varphi = \{\varphi(U)\}_U$$

$$\text{où, si } U \in X \quad \varphi(U): \beta^{-1}F(U) \longrightarrow E(U) \quad \text{et où } \gamma \text{ est définie}$$

$$\alpha \longmapsto \gamma$$

ainsi :

$$\forall x \in U \quad \exists V_x \text{ voisinage ouvert de } \beta(x) \text{ dans } Y$$

$$\exists U_x \text{ voisinage ouvert de } x \text{ dans } X \quad / \quad \beta(U_x) \subset V_x$$

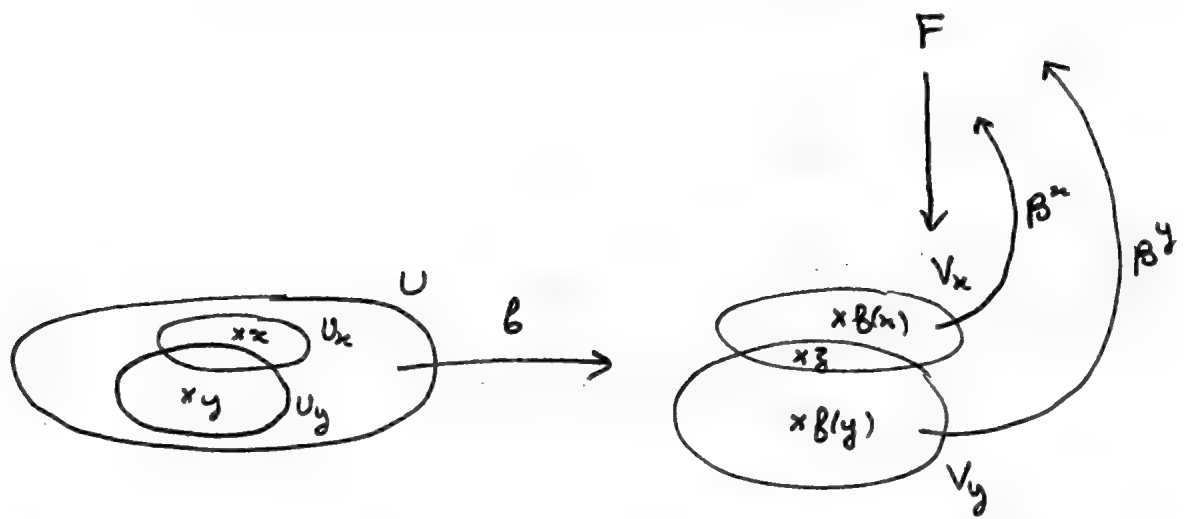
$$\exists \beta^x \in F(V_x) \quad / \quad \alpha|_{U_x} = (\beta^x \circ \beta)|_{U_x} \quad (1)$$

$$\text{où } \beta^x \circ \beta \in \beta^{-1}F(\beta^{-1}(V_x)).$$

$$\text{On pose alors } \gamma^x = \psi(V_x) \cdot \beta^x \in E(\beta^{-1}(V_x)) \quad (2)$$

$$\text{de sorte que } \gamma^x|_{U_x} \in E(U_x) \quad (3)$$

Affirmation : toutes les sections (3) se recollent en une section γ sur U
ie $\forall x, y \in U \quad \gamma^x|_{U_{xy}} = \gamma^y|_{U_{xy}} \quad \text{où } U_{xy} \doteq U_x \cap U_y.$



(1) $\Rightarrow \beta^x = \beta^y$ sur $\beta(U_x \cap U_y)$ car α est une section globale sur U .
 Donc $\forall z \in \beta(U_x \cap U_y) \quad \left. \begin{aligned} (\gamma^x)_z &= \lim_{\rightarrow} \gamma(V_x) \cdot \beta^x = \gamma_z \cdot (\beta^x)_z \\ &= \lim_{\rightarrow} \gamma(V_y) \cdot \beta^y = \gamma_z \cdot (\beta^y)_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\gamma^x)_z = (\gamma^y)_z$

(γ est un morphisme de faisceaux).

Ainsi $\gamma^x|_{U_{xy}} = \gamma^y|_{U_{xy}}$.

③ Ces 2 applications \mathcal{F} et \mathcal{S} sont inverses l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\beta^{-1}F, E) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Hom}(F, \beta_* E) \xrightarrow{\mathcal{S}} \text{Hom}(\beta^{-1}F, E) \\ \gamma &\longmapsto \Psi = \mathcal{F}(\gamma) \longmapsto \tilde{\gamma} = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\gamma) \end{aligned}$$

Par construction, Ψ est défini par :

$$\forall V \in \mathcal{Y} \quad \forall s \in F(V) \quad \Psi(V)(s) = \gamma(\beta^{-1}(V))(s \circ \beta)$$

Par construction de l'image $\tilde{\gamma}$ de Ψ par \mathcal{S} , on a :

$$\forall \alpha \in \beta^{-1}F(U) \quad \alpha|_{U_x} = (\beta^x \circ \beta)|_{U_x}$$

$$\gamma^x = \gamma(V_x) \quad \beta^x = \gamma(\beta^{-1}(V_x))(\beta^x \circ \beta)$$

d'où :

$$\gamma^x|_{U_x} = \gamma(\beta^{-1}(V_x))(\beta^x \circ \beta)|_{U_x} \stackrel{(x)}{=} \gamma(U_x)((\beta^x \circ \beta)|_{U_x})$$

$$= \gamma(U_x)(\alpha|_{U_x}) \text{ d'après (1)}$$

d'où, par recollage, $\gamma = \gamma(U)(\alpha)$, et par définition $\tilde{\gamma} = \mathcal{S}(\gamma) = \alpha$
 d'où $\tilde{\gamma} = \gamma$, ie $\mathcal{S} \circ \mathcal{F} = \text{id}$.

(1) C'est la commutativité du diagramme $E(U) \xrightarrow{\gamma(U)} F(U)$ où γ_U et β_U sont les morphismes restriction, et où $\gamma: E \rightarrow F$ est un morphisme de faisceaux, qui donne $\forall s \in E(U) \quad [\gamma(U)(s)]|_{F(V)} = \gamma(V)(s|_V)$

Il reste encore à montrer que $\tilde{\Sigma} \circ \Sigma = \text{id}$:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(F, \beta_* E) & \xrightarrow{\Sigma} & \text{Hom}(\beta^{-1} F, E) & \xrightarrow{\tilde{\Sigma}} & \text{Hom}(F, \beta_* E) \\ \Psi & \longmapsto & \Psi & \longmapsto & \tilde{\Psi} \doteq \tilde{\Sigma}(\Psi) \end{array}$$

Si $V \in \mathcal{Y}$, on a par construction de $\tilde{\Sigma}$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Psi}(V) : F(V) & \longrightarrow & E(\beta^{-1}(V)) \\ \downarrow & \longmapsto & \downarrow \\ & & \Psi(\beta^{-1}(V)) (\alpha \circ \beta) \end{array}$$

La construction ③ donne alors, dans le cas où $\alpha \circ \beta = \alpha \in \beta^{-1} F(U)$, $V_x = V$ et $U_x = \beta^{-1}(V)$, $\beta^x = \alpha$, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(V)(\alpha) &= \Psi(\beta^{-1}(V))(\alpha \circ \beta) = \Psi(V_x) \cdot \beta^x & (\text{cf (2)}) \\ &= \Psi(V) \cdot (\alpha) \end{aligned}$$

d'où $\tilde{\Psi} = \Psi$ et $\tilde{\Sigma} \circ \Sigma = \text{id}$.

CQFD

Définition 9.2 : Soient E (resp. F) un faisceau de base X (resp. Y) et $\beta : X \rightarrow Y$ continue. Un β -comorphisme (de F dans E) est un élément de $\text{Hom}(F, \beta_* E) = \text{Hom}(\beta^{-1} F, E)$

$$\begin{array}{ccc} E & & F \rightarrow \beta_* E \\ \downarrow & & \downarrow \swarrow \\ X & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Exemple fondamental 9.3 : Comorphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} & & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p} \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow[\text{analytique}]{\beta} & \mathbb{C}^p \end{array}$$

Dans ce cas de figure, on a le comorphisme évident :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p} &\longrightarrow \beta_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \\ h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}(U) &\longmapsto h \circ \beta \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\beta^{-1}(U)) \end{aligned}$$

Un sous le point de vue $\text{Hom}(\beta^{-1} F, E)$, on obtient (grâce à 9.1) le fait qu'une section $s \in \beta^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ définit globalement une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}$ qui fait commuter le diagramme. (cf ② Prop. 9.1)

Définition 9.4: Un espace annelé est la donnée

* d'un espace topologique X

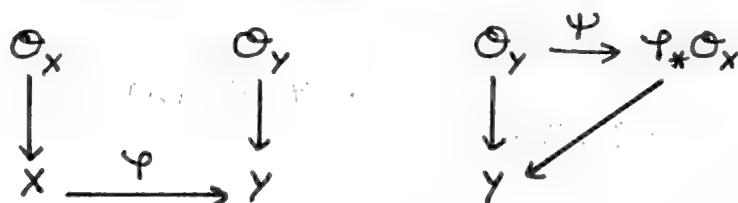
* d'un faisceau d'anneaux, appelé faisceau structural de l'espace annelé, et noté \mathcal{O}_X .

X s'appelle la base, ou encore l'espace topologique sous-jacent à l'espace annelé (X, \mathcal{O}_X) .

On notera X -module au lieu de \mathcal{O}_X -module.

Un morphisme d'espaces annelés est un couple $f = (\varphi, \psi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ où $\varphi : X \rightarrow Y$ est une application continue et où ψ est un φ -comoment-morphisme.

L'application φ s'appelle l'application sous-jacente à f , et on notera parfois $\varphi = \{f\}$ et $\varphi = f^*$. On fait parfois l'abus $\varphi = f$.



$$\psi \in \text{Hom}(\mathcal{O}_Y, \varphi_* \mathcal{O}_X) = \text{Hom}(\varphi^{-1} \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$$

Nous supposons toujours, dans la suite, que \mathcal{O}_X est un faisceau d'anneaux unitaires sur X .

On notera que :

$$\psi_x : \mathcal{O}_{Y, \varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X, x}$$

En effet, $\psi \in \text{Hom}(\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X)$ et $(\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y))_x = \mathcal{O}_{Y, \varphi(x)}$ (cf NB du 5.2)

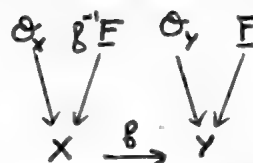
10. Foncteurs β^* et β_*

Soit $\beta: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. On définit le foncteur β^* de la catégorie des Y -modules dans la catégorie des X -modules de la façon suivante:

Soit \underline{F} un Y -module. Alors $\beta^{-1}\underline{F}$ est un $\beta^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module d'après 5.5.

D'autre part, $\psi \in \text{Hom}(\beta^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$ permet de structurer \mathcal{O}_X en $\beta^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module, de sorte que l'on puisse poser:

$$\boxed{\beta^*\underline{F} = \mathcal{O}_X \otimes_{\beta^{-1}\mathcal{O}_Y} \beta^{-1}\underline{F}}$$



$\beta^*\underline{F}$ est ainsi un $\beta^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module qui hérite de la structure de X -module de \mathcal{O}_X . (*)

On a, immédiatement:

$$1) \forall x \in X \quad y = \beta(x) \quad (\beta^*\underline{F})_x = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \underline{F}_y$$

$$2) \beta^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$$

La 1) provient de 4.1 et de $(\beta^{-1}\underline{F})_x = \underline{F}_y$ (cf NB du 5.2). La 2) se vérifie directement:

$$\beta^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X \otimes_{\beta^{-1}\mathcal{O}_Y} \beta^{-1}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$$

10.1 Proposition: Le foncteur β^* est exact à droite.

En effet, si $M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de \mathcal{O}_Y -modules, on applique successivement

- 1) le foncteur β^{-1} qui est exact
- 2) le foncteur $\mathcal{O}_X \otimes_{\beta^{-1}\mathcal{O}_Y}$ qui est exact à droite

pour obtenir β^* .

CQFD

(*) Si H et N sont 2 A -modules et si M est un anneau, $M \otimes_A N$ est certes un A -module, mais il hérite d'une structure de M -module par la multiplication $\lambda(m \otimes n) = (\lambda m) \otimes n$

10.2 Définitions

Soient X un espace annelé et E un \mathcal{O}_X -module.

(1) On dit que E est localement de type fini si pour tout point x de X il existe un voisinage U et un morphisme :

$$\mathcal{O}_X^p|_U \rightarrow E|_U \rightarrow 0$$

(2) On dit que E est localement de présentation finie si pour tout point x de X il existe un voisinage ouvert U et des morphismes :

$$\mathcal{O}_X^r|_U \rightarrow \mathcal{O}_X^p|_U \rightarrow E|_U \rightarrow 0$$

(3) E est dit localement libre si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que $\mathcal{O}_X^p|_U \cong E|_U$.

Rappel : Un morphisme de faisceau $\varphi: F \rightarrow G$ est injectif (resp. surjectif) si (par définition) $\varphi_x: F_x \rightarrow G_x$ est injectif (resp. surjectif) pour tout $x \in X$. Si $\varphi: F \rightarrow G$ est injectif, alors $\varphi(U): F(U) \rightarrow G(U)$ est injectif pour tout ouvert U de X . Mais attention ! $\varphi: F \rightarrow G$ surjectif n'implique pas que $\varphi(U): F(U) \rightarrow G(U)$ soit surjective. (cf cours sur les faisceaux)

10.3 Remarque importante

Soit E un \mathcal{O}_X -module, où (X, \mathcal{O}_X) est un espace annelé. Alors E est localement de type fini ssi tout point de X possède un voisinage ouvert U tel que :

$$\exists s_1, \dots, s_p \in E(U) \quad \forall x \in U \quad \forall s \in E_x \quad s = \sum \lambda_i s_{i,x} \quad \text{où } \lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x}$$

preuve : Si E est localement de type fini, alors

$$\mathcal{O}_X^p|_U \xrightarrow{F} E|_U \rightarrow 0 \quad (1)$$

\mathcal{O}_X est unitaire, donc on possède p sections globales $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ de \mathcal{O}_X^p . Notons $\begin{cases} s_1 = F((1, 0, \dots, 0)) \\ \vdots \\ s_p = F((0, \dots, 0, 1)) \end{cases}$, ie $\begin{cases} (1, 0, \dots, 0) \mapsto s_1 \in E(U) \\ \vdots \\ (0, \dots, 0, 1) \mapsto s_p \in E(U) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow F$ surjectif $\Leftrightarrow F$ surjectif fibre à fibre (cf rappel du 10.2)
ie $\forall x \in U \quad F_x: (\mathcal{O}_X^p|_U)_x \rightarrow E_x$ est surjectif

Par suite
 $\forall x \in U \quad \forall s \in E_x \quad \exists \lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x} \quad s = \sum_{i=1}^p \lambda_i s_{i,x} \quad (2)$

En outre, si (2) est vérifié, on définit le morphisme de faisceaux \mathbb{E} en posant $\mathbb{E}(U) = (\underbrace{0, \dots, 1, \dots, 0}_{k\text{-place}}) = s_k \in \mathbb{E}(U)$. Il est évident que \mathbb{E}_x est surjective, i.e. que l'on a (1).

CQFD

10.4 Proposition:

Les 3 définitions du 10.2 sont stables par β^* . Cela signifie que si $\beta: X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces annelés et si \underline{F} est un Y -module, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{F} \text{ loc. de type fini} \Rightarrow \beta^* \underline{F} \text{ loc. de type fini} \\ \underline{F} \text{ loc. de présentation finie} \Rightarrow \beta^* \underline{F} \text{ aussi} \\ \underline{F} \text{ loc. libre} \Rightarrow \beta^* \underline{F} \text{ aussi} \end{array} \right.$$

preuve:

Montrons seulement que \underline{F} loc. de type fini $\Rightarrow \beta^* \underline{F}$ aussi.

* Si $\mathcal{O}_Y^p \rightarrow \underline{F} \rightarrow 0$, on a $\beta^*(\mathcal{O}_Y^p) \rightarrow \beta^* \underline{F} \rightarrow 0$ d'après 10.1, et

$$\begin{aligned} \beta^*(\mathcal{O}_Y^p) &= \beta^*(\mathcal{O}_Y \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_Y) \\ &= \mathcal{O}_X \otimes \varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X \otimes (\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y) \oplus \dots \oplus \varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y)) \\ &= \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{O}_X \otimes \varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X^p \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{O}_X^p \rightarrow \beta^* \underline{F} \rightarrow 0$ et $\beta^* \underline{F}$ est bien de type fini.

* Si $\mathcal{O}_Y^p|_U \rightarrow \underline{F}|_U \rightarrow 0$, on montre que $\mathcal{O}_X^p|_{\beta^{-1}(U)} \rightarrow \beta^*(\underline{F})|_{\beta^{-1}(U)} \rightarrow 0$ en appliquant $\tilde{\beta}^{-1}$ et en tensorisant par $\mathcal{O}_{\tilde{\beta}^{-1}(\mathcal{O}_Y|_U)}$, où l'on a pué : $\tilde{\beta}: \tilde{\beta}^{-1}(U) \rightarrow U$ et $i: U \hookrightarrow Y$.

Alors :

$$\mathcal{O}_X|_{\beta^{-1}(U)} \otimes_{\tilde{\beta}^{-1}(\mathcal{O}_Y|_U)} \tilde{\beta}^{-1}(\mathcal{O}_Y^p|_U) \rightarrow \mathcal{O}_X|_{\beta^{-1}(U)} \otimes_{\tilde{\beta}^{-1}(\mathcal{O}_Y|_U)} \tilde{\beta}^{-1}(\underline{F}|_U) \rightarrow 0$$

CQFD

10.5 Définition de β_* :

Soit $\beta: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. β_* est un foncteur de la catégorie des X -modules dans celle des Y -modules défini comme suit :

$\beta = (\varphi, \psi)$ où $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{O}_Y, \beta_* \mathcal{O}_X)$. Si \underline{F} est un X -module, $\beta_* \underline{F}$ est un $\beta_* \mathcal{O}_X$ -module et le comorphisme φ structure $\beta_* \underline{F}$ en \mathcal{O}_Y -module.

β_* est un foncteur exact à gauche et admet des foncteurs dérivés non triviaux. On prendra garde que la proposition 10.4 est fausse avec β_* .

Exemple : Revenons au comorphisme canonique 9.3, dans le cas particulier où :

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \beta_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$
 $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(U) \longmapsto h \circ \beta \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\beta^{-1}(U))$

Comme β est fermé, la prop. 8.1 donne :

$$(\beta_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}})_{(x,y)} = \varinjlim_{\beta^{-1}(U) \subset V \subset X} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(V) = \varinjlim_{x \in V \subset X} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(V) = \mathcal{O}_{\mathbb{C},x}$$

Notons que $y \circ (\beta_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}})_{(x,y)} = 0$.

11. Support, Sous-espaces annelés, Annulateur

Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé, \underline{F} un X -module. Si $s \in \underline{F}(U)$ est une section au dessus de l'ouvert U de X , on définit le support de s par :

$$|s| = \{x \in U / s_x \neq 0\}$$

$|s|$ est un fermé de U puisque si $s_x = 0$, s coïncide avec la section nulle au voisinage de x (cf (*) p 30 verso). $|s|$ est la complémentaire du plus grand ouvert V inclus dans U tel que $s|_V = 0$.

L'ensemble $\{x \in X / \underline{F}_x \neq 0\}$ n'est pas fermé en général, puisque $\underline{F}_x = 0 \Leftrightarrow s_x = 0 \quad \forall s \in \underline{F}(U)$, ie $\{x \in X / \underline{F}_x = 0\} = \bigcup \bigcap \{y \in U / s_y = 0\}$ et une réunion infinie d'ouverts n'est pas ouverte en $x \in X \quad s \in \underline{F}(U)$ général. On définira donc le support du X -module \underline{F} par :

$$|\underline{F}| = \{x \in X / \underline{F}_x \neq 0\}$$

11.1 Proposition : Si \underline{F} est un X -module localement de type fini, alors $|\underline{F}| = \{x \in X / \underline{F}_x \neq 0\}$

preuve : il faut montrer que $\{x \in X / \underline{F}_x = 0\}$ est ouvert dans X .
On a $\mathcal{O}_X^p|_U \rightarrow \underline{F}|_U \rightarrow 0$, ou, ce qui est équivalent (cf 10.3) à : tout point de X possède un voisinage ouvert U tel que :

$$\forall x \in U \quad \forall s \in \underline{F}_x \quad s = \sum_{i=1}^p \lambda_i s_{i,x} \quad \text{ou } \lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et où } s_1, \dots, s_p$$

sont des sections de \underline{F} sur U (ie $s_i \in \underline{F}(U)$).

Alors :

$$\begin{aligned} U \cap \{x / \underline{F}_x = 0\} &= \{x \in U / s_{1,x} = \dots = s_{p,x} = 0\} \\ &= \bigcap_{i=1}^p \{x \in U / s_{i,x} = 0\} = \text{ouvert comme intersection} \end{aligned}$$

finie d'ouverts.
CQFD

11.2 Sous-espace annelé ouvert de X

Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé et U un ouvert de X .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U & & \mathcal{O}_X \\ \downarrow & \searrow i & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & X \end{array}$$

On munit U d'une structure d'espace annelé en considérant le faisceau restreint $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$ sur U . On a :

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_X, i_*(\mathcal{O}_X|_U)) = \text{Hom}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U)$$

et il est facile de prendre $\text{Id} \in \text{Hom}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U)$ et de le transporter. On obtient ainsi le morphisme d'espaces annelés (i, Id) dit morphisme canonique :

$$i = (i, \text{Id}) : (U, \mathcal{O}_U) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

(U, \mathcal{O}_U) s'appelle un sous-espace annelé ouvert de X .

11.3 Sous-espace annelé fermé de X défini par un idéal

Soient I un idéal de \mathcal{O}_X (sous-entendu : un faisceau d'idéaux) et $Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/I)$ (où le support est compris au sens de la définition p39)

$(Y, (\mathcal{O}_X/I)|_Y)$ est un espace annelé appelé sous-espace annelé fermé de X défini par l'idéal I .

C'est même un faisceau d'anneaux unitaires sur Y : Certes, \mathcal{O}_X/I n'est pas un faisceau d'anneaux unitaires sur X puisque $\mathcal{O}_{X,x} = I_x$ sur le complémentaire du support Y , donc $\mathcal{O}_{X,x}/I_x = 0 =$ anneau non unitaire si $x \notin Y$.

Comme \mathcal{O}_X/I est un \mathcal{O}_X -module de type fini (puisque $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/I \rightarrow 0$) on a, d'après la prop. 11.1 :

$$Y = \text{Supp } \mathcal{O}_X/I = \{x \in X / \mathcal{O}_{X,x} \neq I_x\}$$

donc $\mathcal{O}_{X,x}/I_x \neq 0$ pour tout $x \in Y$ et $\mathcal{O}_{X,x}/I_x$ est bien unitaire.

On notera que

$$(\mathcal{O}_X/I)|_Y = \mathcal{O}_X|_Y / I|_Y$$

Cela provient de la suite

exacte $0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/I \rightarrow 0$ et de l'exactitude du foncteur $i^{-1}(\cdot) = |_Y$, qui donne :

$$0 \rightarrow I|_Y \rightarrow \mathcal{O}_X|_Y \rightarrow (\mathcal{O}_X/I)|_Y \rightarrow 0$$

11.4 Définition :

Soit Y un sous-espace annelé fermé de X défini par l'idéal I . On dit que Y est de présentation finie si l'une des prop. équiv. suivantes est vraie :

- (i) I est localement de type fini
- (ii) \mathcal{O}_X/I est localement de présentation finie.

preuve :

$$(i) \Rightarrow (ii) \quad \mathcal{O}_Y = (\mathcal{O}_X/I)|_Y \quad \text{où } Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/I), \text{ donc } x \notin Y \Rightarrow (\mathcal{O}_X/I)_x = 0.$$

Ainsi \mathcal{O}_X/I est le prolongé par 0 de \mathcal{O}_Y . (cf §6 p28)

Les 2 suites exactes $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_x^s \rightarrow I \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x/I \rightarrow 0 \end{array} \right.$ se recollent
puisque \mathcal{O}_x^s s'envoie surjectivement sur le noyau I de $\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x/I$, de sorte que l'on ait la suite exacte :

$$\mathcal{O}_x^s \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x/I \rightarrow 0$$

donc \mathcal{O}_x/I est loc. de présentation finie.

(ii) \Rightarrow (i) trivial ^{fau.} : Si $\mathcal{O}_x^s \rightarrow \mathcal{O}_x^f \rightarrow \mathcal{O}_x/I \rightarrow 0$, on a $\mathcal{O}_x^s \rightarrow I \rightarrow 0$.
tout de même ! et si $\mathcal{O}_x^s \rightarrow \mathcal{O}_x^f \rightarrow \mathcal{O}_x/I$

11.5 Annulateur de \underline{F}

Soit \underline{F} un X -module. $\underline{\text{Ann}}(\underline{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \{s \in \mathcal{O}_X(U) / s \cdot \underline{F}(U) = 0\}$$

$\underline{\text{Ann}}(\underline{F})$ s'appelle le faisceau annulateur de \underline{F} .

Si \underline{F} est localement de type fini, $(\underline{\text{Ann}}(\underline{F}))_x = \text{Ann}_{\mathcal{O}_x}(\underline{F}_x)$ ^(*). En effet, seule l'inclusion $\text{Ann } \underline{F}_x \subset (\underline{\text{Ann}}(\underline{F}))_x$ n'est pas triviale ^{xxx}. Si $s \in \text{Ann } \underline{F}_x$, $\forall f_n \in \underline{F}_x$, $s \cdot f_n = 0 \Leftrightarrow \exists V_{f_n}$ vois. de x $s \in \mathcal{O}_x(V_{f_n})$ $f_n \in \underline{F}(V_{f_n})$ $s \cdot f_n = 0$, s et f_n admettant les germes s et f_n en x .
Alors on trouvera un voisinage V de x tel que $\forall o \in \mathcal{O}(V)$ et $s \cdot \underline{F}(V) = 0$ dès que $\bigcap_{f_n \in \underline{F}_x} V_{f_n}$ sera un ouvert. C'est vrai en particulier lorsque \underline{F} est loc. de type fini. (cf remarque 10.3)

(*) Si M est un A -module, l'annulateur de M est l'idéal $\text{Ann}_A M = \{a \in A / a \cdot x = 0 \forall x \in M\}$

Si E est localement de type fini, comme $\text{Ann } E$ est un idéal, on peut lui associer son sous-espace annulé fermé associé :

$$\left(\text{Supp } \frac{\mathcal{O}_X}{\text{Ann } E}, \left(\frac{\mathcal{O}_X}{\text{Ann } E} \right) \Big|_{\text{Supp } \frac{\mathcal{O}_X}{\text{Ann } E}} \right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Supp } \frac{\mathcal{O}_X}{\text{Ann } E} &= \{x \in X / \text{Ann } E_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &= \{x \in X / E_x \neq 0\} = \text{Supp } E \end{aligned}$$

(11.1)

En effet, $\{x \in X / \text{Ann } E_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} = \{x \in X / E_x \neq 0\}$ car si $x \in X$ est tel que $\text{Ann } E_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$, alors $1 \notin \text{Ann } E_x$ (sinon on aurait l'égalité) d'où $E_x \neq 0$. Inversement, si $E_x \neq 0$, $1 \notin \text{Ann } E_x$ donc $\text{Ann } E_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$ (on utilise seulement le fait que $\mathcal{O}_{X,x}$ est unitaire).

Chapitre 4

Le théorème de préparation de Weierstrass

1. Faisceau des fonctions analytiques sur un espace vectoriel de dimension finie E

Soit $f = \sum p_R$ une fonction analytique sur E , où $p_R: E \rightarrow \mathbb{C}$ sont des appl. polynômes $R \in \mathbb{N}$ homogènes de degré R sur E (cf Chap 1, p 4)

$$\omega(f) = \inf \{ R \in \mathbb{N} / p_R \neq 0 \} = \text{ordre de } f$$

On a $\omega(fg) = \omega(f) + \omega(g)$ donc l'anneau \hat{A}_E (resp. A_E) des fonctions analytiques formelles (resp. convergentes) est un anneau intègre.

Rappelons que l'on dit que $f \in \hat{A}_E$ est convergente ssi $\sum \|p_R\|_Z^R$ converge pour un $Z > 0$, où $\|p_R\|$ désigne la norme de l'application multilinéaire symétrique associée à p_R .

\hat{A}_E et A_E sont des anneaux locaux puisque l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal (à savoir : $\{f / \omega(f) > 0\}$)

On a :

$$\hat{A}_E / \hat{M}_E \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \quad \text{et} \quad A_E / M_E \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}.$$

$$\sum p_R \mapsto p_0$$

en notant \hat{M}_E et M_E les idéaux maximaux respectifs de \hat{A}_E et A_E .

Notations particulières : Si $E = \mathbb{C}^n$, on notera $A_n = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} = A_{\mathbb{C}^n}$ et $\hat{A}_n = \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] = \hat{A}_{\mathbb{C}^n}$.

Remarque : $A_E \hookrightarrow A_{E \times F}$

$$\sum p_R \mapsto \sum p_R \circ \pi \quad \text{où } \pi: E \times F \rightarrow E, \text{ ce qui a un sens}$$

car $p_R \circ \pi$ est bien une application multilinéaire symétrique de $E \times F$ dans \mathbb{C} donc $p_R \circ \pi$ est bien un polynôme homogène (cf Chap 1, p 3)

Le faisceau des fcts analytiques sur E , noté \mathcal{O}_E , est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{O}_E(U) = \text{"ens. des fcts anal. sur } U \text{"}$.

2. Théorème de préparation de Weierstrass

2.1 Théorème de division de Weierstrass (version globale)

Soient K une partie compacte et connexe de E

L un compact de \mathbb{C} tel que $L = \bar{L}$ (en particulier, L n'a pas de points isolés)

h holomorphe sur un voisinage de $K \times L$

On suppose que $h(x, z) \neq 0$ si $(x, z) \in K \times \partial L$

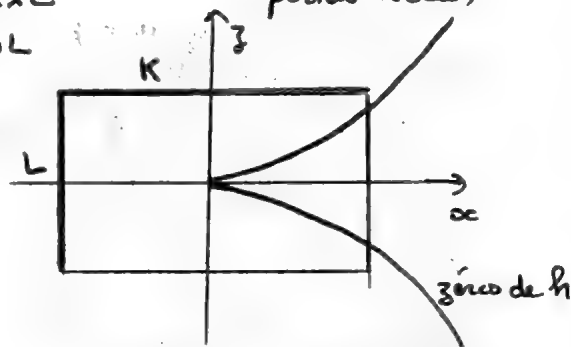
Alors :

(1) Le nombre de zéros de

$$h_x : L \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto h(x, z)$$

dans L est constant pour tout $x \in K$.



(2) Notons d le nombre de zéros de h_x . Alors :

$$B(K \times L) = h \cdot B(K \times L) \oplus B(K) \oplus \sum B(K) \oplus \dots \oplus \sum^{d-1} B(K)$$

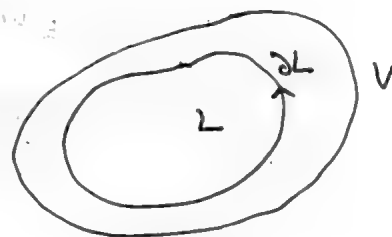
(où $B(T)$ désigne l'ensemble des applications analytiques sur l'intérieur \bar{T} et continues sur T .)

preuve: on définit $d_x = \int_{\partial L} \frac{h'_x(z)}{h_x(z)} dz$

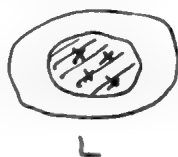
$h \in \mathcal{O}(U \times V)$ où $U \times V$ est un ouvert contenant $K \times L$

(1) $h_x : V \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et

$d_x = \int_{\partial L} \frac{h'_x(z)}{h_x(z)} dz$ représente le nbre de zéros de h_x dans L . C'est une fonction continue sur le connexe K à valeurs dans \mathbb{Z} , donc constante.



(2) Soient $x \in U$ et $f \in B(L)$. Un th. de Lagrange (amélioré) montre qu'il existe un et un seul polynôme P dans \mathbb{C} qui possède les zéros de f avec la même multiplicité (dans L). Alors $f - P$ est divisible par h_x dans $B(L)$



L'application $\Upsilon_x : B(L) \oplus \mathbb{C}^d \longrightarrow B(L)$

$$(q, a_0, \dots, a_{d-1}) \longmapsto qh_x + a_0 + \dots + a_{d-1}z^{d-1}$$

est linéaire bijective continue. Le th. de l'inverse continu, valable entre 2 Banach, donne donc que Υ_x est un isomorphisme linéaire et topologique. De l'a, on peut déduire que l'application :

$$U \longrightarrow \mathcal{L}(B(L) \oplus \mathbb{C}^d, B(L)) = \text{Banach}$$

$$x \longmapsto \Upsilon_x \text{ (où } \Upsilon_x \text{ isomorphisme linéaire topologique)}$$

est analytique, ainsi que

$$U \longrightarrow \mathcal{L}(B(L), B(L) \oplus \mathbb{C}^d)$$

$$x \longmapsto \Upsilon_x^{-1}$$

Υ_x^{-1} est un isomorphisme linéaire topologique, donc $\forall f_x \in B(K \times L)$ $f_x \in B(L)$ et il existe $d(x, z) \in B(L)$, x fixé, ainsi que $(r_0(x), \dots, r_{d-1}(x)) \in \mathbb{C}^d$ tels que $f(x, z) = h(x, z)d(x, z) + r_0(x) + \dots + z^{d-1}r_{d-1}(x)$

Les r_0, \dots, r_{d-1} sont analytiques, ie $r_i \in B(K)$: par exemple, $r_0(x) = \pi_0 \circ \Upsilon_x^{-1}(f_x(x))$ est analytique comme composée de 3 fonctions analytiques ($\pi_0 = \text{proj. sur } a_0$)

(NB : $K \rightarrow B(L)$; $x \mapsto f_x(x)$ est analytique !)

Enfin, comme $B(K \times L) \cong B(K, B(L))$ d'après la prop. 3.4, du chap 1 on montre que $d(x, z) \in B(K, B(L))$.

CFD

2.2 Corollaire : $B(K \times L) / h B(K \times L)$ est un $B(K)$ -module libre de rang d
(avec les hyp. de 2.1)

Exemple : $h(x, z) = z^2 - x^3$

$$K = \{x \in \mathbb{C} / |x| \leq E\}$$

$$L = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq E\}$$

$z^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow z^2 = x^3$, et si de plus $(x, z) \in K \times \partial L$, $|x|^3 = E^2$ donc $|x| = E^{2/3} > E$ dès que $E < 1$.

Ainsi toute fonction $f \in B(K \times L)$ s'écrit :

$$f(x, z) = d(x, z)(z^2 - x^3) + r_0(x) + r_1(x)z$$

Passons maintenant à la version locale du théorème de division de Weierstrass :

(Théorème local de division de Weierstrass)

2.3 Proposition : Soit $h \in A_{E \times \mathbb{C}}$ un germe de série convergente tel que l'image de $h_0 = h(0, t)$ dans $A_{\mathbb{C}}$ ne soit pas identiquement nulle, alors le A_E -module $A_{E \times \mathbb{C}} / h A_{E \times \mathbb{C}}$ est libre de type fini et admet pour base $1, t, \dots, t^{d-1}$ où d est l'ordre de h_0 (ie la multiplicité du zéro 0 de h_0) (ou la valuation) en 0.
(ie $h_0(t) = t^d \sum_{i \geq 0} \alpha_i t^i$ ($\alpha_i \neq 0$)).

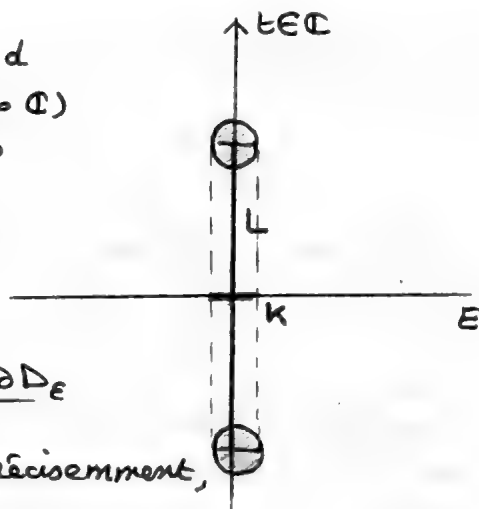
preuve :

Comme $h(0, t) \neq 0$ et admet un zéro d'ordre d à l'origine, le principe des zéros isolés (dans \mathbb{C}) donne l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $h(0, t) \neq 0$ pour tout $t \in \bar{D}_\varepsilon \setminus \{0\}$. Comme ∂D_ε est un compact, il est facile d'obtenir un

$K =$ compact connexe de E

$L =$ compact de $\mathbb{C} = \bar{D}_\varepsilon$

tel que h ne s'annule jamais sur $K \times \partial D_\varepsilon$



La prop 2.3 résulte de cette remarque. Plus précisément,

soient $\begin{cases} \tilde{h} \in \mathcal{O}_{E \times \mathbb{C}}(U \times V) \text{ de germe } h \text{ en } 0 \\ \tilde{h}_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(V) \text{ de germe } h_0 = h(0, \cdot) \text{ en } 0 \end{cases}$

\tilde{h}_0 ne s'annule qu'à l'origine de V et 0 est un zéro de multiplicité d .

Après ce qui précède, il existe une suite décroissante $(L_v)_{v \in \mathbb{N}}$ de compacts connexes (prendre des boules) inclus dans V formant un système fondamental de voisinages de 0, et pour chaque $v \in \mathbb{N}$ il existe un compact connexe K_v de E tel que h ne s'annule pas sur $K_v \times \partial L_v$, $(K_v)_{v \in \mathbb{N}}$ forme une suite décroissante et $(K_v \times L_v)_{v \in \mathbb{N}}$ soit un syst. fond. de voisinages de 0.

Le théorème 2.1 donne la suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow \tilde{h} B(K_v \times L_v) \rightarrow B(K_v \times L_v) \xrightarrow{\sim} \sum_{i=0}^{d-1} t^i B(K_v) \rightarrow 0$$

(scindée : cf Th 2.1 (2))

En passant à la limite inductive, on obtient la suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow h_0 A_{E \times \mathbb{C}} \rightarrow A_{E \times \mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \sum_{i=0}^{d-1} t^i A_E \rightarrow 0$$

donc

$$A_{E \times \mathbb{C}} = h_0 A_{E \times \mathbb{C}} \oplus \sum_{i=0}^{d-1} t^i A_E$$

← c'est une façon équivalente de formuler la prop. 2.3

cpf)

ex: $f(x,t) = x + x^2t + t^3$ vérifie $f(0,t) = t^3$, donc tout germe $a(x,t)$ de \mathbb{C}^2 en 0 s'écrit :

$$a(x,t) = q(x,t)(x + x^2t + t^3) + \lambda_0(x) + \lambda_1(x)t + \lambda_2(x)t^2$$

2.4 Proposition (Théorème local de représentation de Weierstrass)

Soit $h \in A_{E \times \mathbb{C}}$ un germe de fonction analytique convergente en 0 dans $E \times \mathbb{C}$, tel que $h_0 = h(0, \cdot)$ ne soit pas identiquement nulle. Notons k l'ordre de h_0 en 0 (ie la valuation de h_0 en 0)

Il existe une et une seule décomposition :

$$h = u \cdot P$$

où u est une unité de $A_{E \times \mathbb{C}}$ et où P désigne un polynôme de Weierstrass en t de degré k (ie $P(x,t) = t^k + a_1(x)t^{k-1} + \dots + a_k(x)$ où $a_i(0) = 0 \ \forall i$, ie tous les a_i ne sont pas inversibles dans A_E)

preuve :

La prop. 2.3 donne :

$$t^k = \lambda(x,t)h + a_k(x) + \dots + a_1(x)t^{k-1}$$

d'où :

$$\lambda(x,t)h = t^k + a_1(x)t^{k-1} + \dots + a_k(x)$$

$\lambda(x,t)$ est une unité. En effet, $\lambda(0,t)h(0,t) = t^k + a_1(0)t^{k-1} + \dots + a_k(0)$ et $h(0,t) = \varphi(t)t^k$ par hypothèse, donc :

$$\lambda(0,t)\varphi(t)t^k - t^k = a_1(0)t^{k-1} + \dots + a_k(0) \Rightarrow a_1(0) = \dots = a_k(0) = 0$$

degrés des monômes $\geq k$

Ainsi $\lambda(0,t) \cdot h_0 = t^k$, et comme h_0 est d'ordre k en 0 , on a nécessairement $\lambda(0,t) = \text{constante } c \neq 0$, donc $\lambda(0,0) = c \neq 0$, donc $\lambda(x,t)$ est bien une unité de $A_{E \times \mathbb{C}}$.

Unicité : elle résulte du Théorème de division 2.3 puisque si $h = uP$ où $P(x,t) = t^k + a_1(x)t^{k-1} + \dots + a_k(x)$, on a :

$$t^k = u^{-1} \cdot h - a_k(x) - \dots - a_1(x)t^{k-1}$$

donc u^{-1} et $a_k(x), \dots, a_1(x)$ uniques d'après 2.3.

CQFD

2.5 Corollaire : L'anneau A_E est noethérien

Pour $n=0$, $A_E = 0$.

Si $n=1$, $A_E = \mathbb{C}\{t\}$ est un anneau principal (tout idéal de $\mathbb{C}\{t\}$ est de la forme $I = (t^k)$ où $k = \inf_{f \in I} w(f)$)

Si n quelconque, soit I un idéal non nul de A_E et $h \in I \setminus \{0\}$.
Il faut montrer que I est de type fini. On peut toujours supposer que $E \simeq E' \times \mathbb{C}$ avec $h(0, t) \neq 0$, de sorte que

$$B = A_{E'} \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C} / \mathbb{C} A_{E'} \times \mathbb{C} \text{ soit un } A_{E'}\text{-module de rang fini.}$$

D'après le Chap. 2. Co 2.4, comme $A_{E'}$ est un anneau noethérien par hypothèse de récurrence, B est de type fini si il est un $A_{E'}$ -module noethérien.

Ainsi B est noethérien.

$I / \mathbb{C} A_{E'} \times \mathbb{C}$ est un sous- $A_{E'}$ -module de B , donc de type fini. Soit

$(b_1, \dots, b_s) \in I$ un système générateur de $I / \mathbb{C} A_{E'} \times \mathbb{C}$.

$$\forall c \in I \exists \lambda_1, \dots, \lambda_s \in A_{E'} \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ /}$$

$$c = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_s b_s + \lambda h$$

donc I est un A_E -module de type fini.

CQFD

2.6 Proposition : Soit M un $A_{E \times F}$ -module de type fini tel que $\dim_{\mathbb{C}} M \otimes_{A_E} \mathbb{C} < \infty$. Alors M est un A_E -module de type fini. (*)

Remarques : a) $\mathbb{C} = A_E / \mathbb{C}$ est structuré en A_E -module. M est un A_E -module grâce à l'application $M_E: A_E \rightarrow A_{E \times F}$ et $M \otimes_{A_E} \mathbb{C}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel (pour la multiplication évidente $\lambda \cdot (m \otimes c) = (\lambda m) \otimes c = m \otimes (\lambda c)$ si $\lambda \in \mathbb{C}$. Noter que $\mathbb{C} \hookrightarrow A_E$, donc que tout A_E -module, en particulier $M \otimes_{A_E} \mathbb{C}$, est canoniquement structuré en \mathbb{C} -espace vectoriel)

(*) E et F de dim finie sur \mathbb{C}

b) la réciproque est vraie : si M est un A_E -module de type fini, $M = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ dans A_E , donc tout élément $m \otimes c$ s'écrit :

$$m \otimes c = (\lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_n \gamma_n) \otimes c = \sum (\lambda_i \gamma_i) \otimes c \quad \lambda_i \in A_E \quad c \in \mathbb{C} = A_E / \mathfrak{m}_E$$

Mais $\lambda_i = c_i + \lambda'_i$ où $\lambda'_i \in \mathfrak{m}_E$ et $c_i \in \mathbb{C}$, donc :

$$m \otimes c = \sum c_i \gamma_i \otimes c + \sum (\lambda'_i \gamma_i) \otimes c$$

Mais $(\lambda'_i \gamma_i) \otimes c = \gamma_i \otimes (\lambda'_i c) = \gamma_i \otimes 0 = 0$ car $\lambda'_i \in \mathfrak{m}_E$. Finalement, $m \otimes c = \sum c_i c (\gamma_i \otimes 1)$ donc $(\gamma_1 \otimes 1, \dots, \gamma_n \otimes 1)$ engendre $M \otimes_{A_E} \mathbb{C}$ comme \mathbb{C} -espace vectoriel.

Remarque 2.6.1 :

$$M \otimes_{A_E} \mathbb{C} = M \otimes_{A_{\text{exF}}} \frac{A_{\text{exF}}}{\mathfrak{m}_E A_{\text{exF}}}$$

En effet, $\frac{A_{\text{exF}}}{\mathfrak{m}_E A_{\text{exF}}} = A_F$ car si $\sum a_{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta \in A_{\text{exF}}$, on a

$$\sum a_{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta = \underbrace{\sum_{\alpha > 0} a_{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta}_{\in \mathfrak{m}_E A_{\text{exF}}} + \underbrace{\sum_{\alpha=0} a_{0\beta} t^\beta}_{\in A_F}$$

et $A_F = A_{\text{exF}} \otimes_{A_E} \mathbb{C}$ d'après la suite exacte :

$$\mathfrak{m}_E \rightarrow A_E \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$$

et puisque le produit tensoriel est exact à droite :

$$A_{\text{exF}} \otimes_{A_E} \mathfrak{m}_E \xrightarrow{\varphi} A_{\text{exF}} \otimes_{A_E} A_E \rightarrow A_{\text{exF}} \otimes_{A_E} \mathbb{C} \rightarrow 0$$

$$\parallel$$

$$A_{\text{exF}}$$

$$\text{Im } \varphi = \mathfrak{m}_E A_{\text{exF}}$$

$$\text{On a donc bien } M \otimes_{A_{\text{exF}}} \frac{A_{\text{exF}}}{\mathfrak{m}_E A_{\text{exF}}} = M \otimes_{A_{\text{exF}}} A_F = M \otimes_{A_{\text{exF}}} (A_{\text{exF}} \otimes_{A_E} \mathbb{C}) = M \otimes_{A_E} \mathbb{C}.$$

Lemme 2.6.2 :

Si $M = A_{\text{exF}}$ -module de type fini et $\dim M \otimes \mathbb{C} < \infty$, alors il existe $h \in A_{\text{exF}}$, $h \neq 0$, dont l'image dans $\frac{A_E}{A_{\text{exF}}} A_{\text{exF}}$ est non nulle et telle que $h.M = 0$.

preuve : Notons que $A_{\text{exF}} = \frac{A_{\text{exF}}}{\mathfrak{m}_E A_{\text{exF}}}$ est une A_{exF} -algèbre.

Rappel (prop 5.3) : si A est un anneau et si M est un A -module de type fini, et si $B = A$ -algèbre, alors en notant $J = \text{Ann}(M \otimes B)$ on a

$$J \subset \sqrt{IB}$$

où $I = \text{Ann}(M)$

Soi, on obtient pour $M = A_{E \times \mathbb{C}^p}$ -module de type fini

$$J = \text{Ann} \left(M \otimes_{A_{E \times \mathbb{C}^p}} \frac{A_{E \times \mathbb{C}^p}}{\mathfrak{m}_E A_{E \times \mathbb{C}^p}} \right)$$

$$B = \frac{A_{E \times \mathbb{C}^p}}{\mathfrak{m}_E A_{E \times \mathbb{C}^p}}$$

$$J = \text{Ann} \left(M \otimes_{A_{E \times \mathbb{C}^p}} \frac{A_{E \times \mathbb{C}^p}}{\mathfrak{m}_E A_{E \times \mathbb{C}^p}} \right) \subset \sqrt{IB}$$

Le lemme 2.6.2 sera montré si l'on démontre que $J \neq 0$, puisqu'alors $IB \neq 0$.

Considérons $N = M \otimes_{A_E} \frac{A_{E \times \mathbb{C}^p}}{\mathfrak{m}_E A_{E \times \mathbb{C}^p}}$. N est de dimension fini

d'après 2.6.1 et l'hypothèse $\dim(M \otimes_{A_E} \mathbb{C}) < \infty$. Soit n_1, \dots, n_r une base de N .

$$N = \sum \mathbb{C} n_i = \sum B n_i \text{ puisque } N = \sum \mathbb{C} n_i \subset \sum B n_i \subset N$$

On a $B n_i \cong B / \text{Ann} n_i$ (par l'application $b \mapsto b n_i$), donc $B n_i \cong B / \text{Ann} n_i$

$\text{Ann} n_i \neq 0$ (sinon $B n_i = B$ et $B n_i \subset N \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} B n_i < \dim_{\mathbb{C}} N < \infty$, ce qui est absurde), donc $\exists b_i \neq 0 / b_i n_i = 0$

$$\text{d'où } \prod_{i=1}^r b_i \in \text{Ann } N = J \Rightarrow J \neq 0$$

(C.F.F.)

preuve de la prop. 2.6: récurrence sur $\dim F$.

* $p=1 \Rightarrow F=\mathbb{C}$. D'après le lemme 2.6.2,

$\exists h \in A_{E \times \mathbb{C}} / h(0, t) \neq 0$ puisque l'image de h dans $A_{\mathbb{C}^p} = \frac{A_{E \times \mathbb{C}^p}}{\mathfrak{m}_E A_{E \times \mathbb{C}^p}}$ n'est pas nulle et telle que $hH=0$. Ainsi:

$$(1) \quad M = \frac{M}{hM} = \frac{A}{hA} \otimes_A M \quad \text{en posant } A = A_{E \times \mathbb{C}}$$

Donc M est un A/hA -module de type fini (car M est un A -module de type fini).

Le théorème de préparation de Weierstrass montre que A/hA est un A_E -module de type fini, donc M est un A_E -module de type fini. (*)

(*) : $\left. \begin{array}{l} H = N\text{-module de type fini} \\ N = A\text{-mod} \end{array} \right\} \Rightarrow M = A\text{-mod de type fini}$

* Si $p > 1$, soit $F = \mathbb{C} \times F'$

$$(2) \dim_{\mathbb{C}} (M \otimes_{A_E} \mathbb{C}) < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} M \otimes_{A_{E \times F'}} \mathbb{C} < \infty \quad (3)$$

En effet, on a la surjection évidente :

$$\begin{aligned} M \otimes_{A_E} \mathbb{C} &\stackrel{(2.6.1)}{=} M \otimes_{A_{E \times F'}} \frac{A_{E \times F'}}{\mathfrak{m}_E A_{E \times F'}} \quad \text{de dim finie.} \\ &\downarrow \text{surjection (provient de la surj. can.)} \\ M \otimes_{A_{E \times F'}} \mathbb{C} &= M \otimes_{A_{E \times F'}} \frac{A_{E \times F'}}{\mathfrak{m}_{E \times F'} A_{E \times F'}} \\ &\downarrow \\ &0 \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence au rang 1 et (3) montre que M est un $A_{E \times F'}$ -module de type fini. Infer (2) montre que l'hypothèse de récurrence est applicable : M est un A_E -module de type fini.

CQFD

2.7. Définition : Soit U un ouvert de E . Un sous-ensemble Δ de U est dit mince si
 $\forall x \in U \quad \exists$ ouvert connexe $V \subset U \quad x \in V \quad \exists f$ analytique sur V
 tels que $\Delta \cap V \subset f^{-1}(0)$.

2.8 Théorème (des Singularités inexistantes)

U ouvert de E

Δ sous-ensemble mince de U ($\Delta \neq U$)

(1) $U \setminus \Delta$ est dense dans U .

(2)

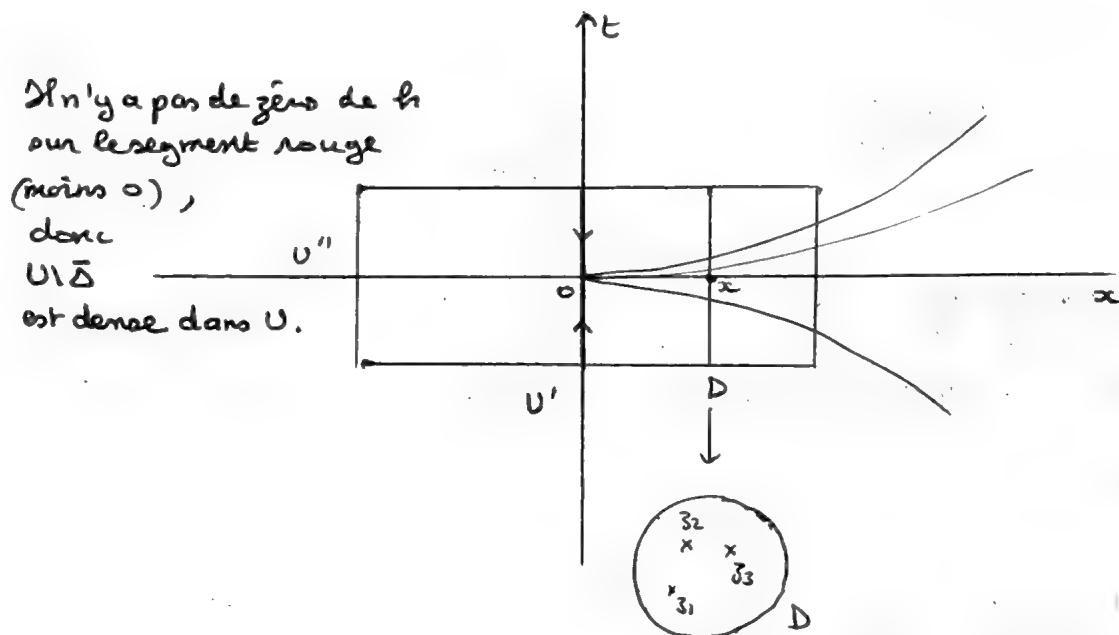
$\left. \begin{array}{l} \beta \text{ continue sur } U \setminus \Delta \\ \text{analytique sur } U \setminus \Delta \\ \text{bornée au voisinage de } \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \text{ se prolonge en une}$

fonction analytique unique sur U tout entier.

(NB : β est dite bornée au voisinage de Δ si tout point δ de Δ possède un voisinage W tel que $\beta|_{W \setminus \Delta}$ soit bornée.)

preuve:

- (1) $E = \mathbb{C}^n$ $V \subset \mathbb{C}^n$ h analytique sur V . On peut supposer que $\Delta = h^{-1}(0)$ (qui peut le plus peut le moins)
On choisit une direction t telle que $h(0, t) \neq 0$ et on se place dans la situation du théorème de préparation de Weierstrass 2.1 (en utilisant le raisonnement de la prop. 2.3):



- (2) admis (cf. Narasimhan, Several complex variables)
On voit facilement que, pour x fixé,

$f_x(t)$ est analytique sur $D \setminus \{z_1, \dots, z_d\}$ et bornée au voisinage de z_1, \dots, z_d , donc (d'après le théorème de prolongement au vois. de singularités inessistantes dans \mathbb{C} provenant du dével. en séries de Laurent) f_x se prolonge sur D en 1 fct anal. sur D .

Il faudrait, ensuite, recoller tout cela.

1. Définitions

1.1 Un espace annelé en \mathbb{C} -algèbre est un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) tel que \mathcal{O}_X soit un faisceau de \mathbb{C} -algèbres. On obtient la catégorie correspondante en considérant les morphismes d'espaces annelés $f = (\varphi, \psi)$ tels que $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{O}_Y, \varphi_* \mathcal{O}_X)$ soit un morphisme de faisceaux de \mathbb{C} -algèbres.

(X, \mathcal{O}_X) est dit "espace annelé en \mathbb{C} -algèbres locales" s'il est annelé en \mathbb{C} -algèbres et si

$$\forall x \in X \quad \mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{C}\text{-algèbre locale d'idéal maximal } \mathfrak{m}_{X,x} \text{ tel que } \mathbb{C} \simeq \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x} \mathcal{O}_{X,x} \quad (*)$$

NB: $\tilde{E}_x: \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x} \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ envoie 1 sur 1 car on sous-entend toujours qu'un morphisme de \mathbb{C} -algèbres locales applique l'élément neutre de la multiplication sur l'élément neutre 1.

1.2 Application sous-jacente à une section de \mathcal{O}_X

Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé en \mathbb{C} -algèbre locale.

Si $f \in \mathcal{O}_X(U)$ et $x \in U$, on note

$$E_x: \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & E_x(f) \end{array}$$

le morphisme évaluation en x . (Usuellement, $E_x(f) = f(x)$)

On définit $\{f\}: U \longrightarrow \mathbb{C}$
 $x \longmapsto E_x(f) = \{f\}(x)$

Alors $\{f\} = 0 \iff f = 0$

(*) $E_x: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{C}$ défini $\tilde{E}_x: \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x} \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, est donné d'après la structure de "esp. ann. en \mathbb{C} -alg. loc."

NB $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}/x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \Big|_{\{1,0\}} = 0$
 (*) $\left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}{x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}\right)_y = 0 \neq \text{anneau local}$
 si $y \neq 0$

1.2.1 Exemple 1: $X = \{0\}$ $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}/x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \Big|_{\{0\}}$

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{X,0} = \mathbb{C}\{x}/x^2\mathbb{C}\{x} \\ \mathcal{M}_{X,0} = x \cdot \mathcal{O}_{X,0} \text{ car l'idéal maximal de } \mathbb{C}\{x\} \text{ est } x\mathbb{C}\{x\}. \end{cases}$$

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ donc induit une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}/x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$
 $x \mapsto x$

par composition avec la projection canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}/x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$
 On a $\{f\}(0) = \varepsilon_0(f) = f(0) = 0$ (*) et pourtant f n'est pas la section nulle.

1.2.2 Exemple 2:

Dans \mathbb{C}^2 , on prend $X: y^2 - x^3 = 0$ et $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2 - x^3) \Big|_X$
 Prenons $f(x,y) = y^2 - x^3 \in \mathcal{O}_X(X)$

On a $0 = \varepsilon_0(f)$ et même $\{f\}(x) = 0 \quad \forall x \in X$ (*), et pourtant f n'est pas la section nulle.

NB: Encore une fois, on écrit que $f = y^2 - x^3 \in \mathcal{O}_X(X)$ alors que $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{C})$ de façon rigoureuse. Mais il est clair qu'une section f de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ donne une section du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2 - x^3)$ par composition avec la projection canonique

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2 - x^3) \rightarrow 0$$

Il suffit alors de restreindre $\pi \circ f$ à X pour obtenir une section de $\mathcal{O}_X(X)$.

1.2.3 Exemple 3: $X = \mathbb{C} \quad \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$

où la multiplication est donnée par:

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0) \\ y &= (0, 1) \\ (f_0 + y f_1)(g_0 + y g_1) &= f_0 g_0 + y(f_1 g_0 + f_0 g_1) \end{aligned}$$

(*) dans ces exemples, $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas réduit (ie $\sqrt{0} \neq 0$)

Alors $y \in \mathcal{O}_x(\mathbb{C})$ $\overbrace{\{y\}}^{\neq 0} = 0$ et $y \neq 0$.

On peut d'ailleurs identifier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X'} = \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}{y^2 \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}} \right) \Big|_{y=0}$
(où $X' = \mathbb{C}$) fibre à fibre.

1.3 Modèle d'espace analytique complexe.

$U \subset \mathbb{C}^p$ $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}(U)$ p fonctions analytiques sur l'ouvert U de \mathbb{C}^p
Soit :

$$\begin{cases} X = \{x \in U / f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\} \\ \mathcal{O}_x = \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}|_U}{(f_1, \dots, f_p)} \right) \Big|_x \end{cases} \quad (**)$$

(X, \mathcal{O}_X) est un espace annelé en \mathbb{C} -algèbres locale appelé modèle d'espace analytique.

On notera (n, U, f_1, \dots, f_p) un tel modèle, et on dira que le modèle est lisse si $p=0$.

1.4 Définition : Un espace analytique complexe est un espace annelé en \mathbb{C} -algèbres localement isomorphe à un modèle d'espace analytique (i.e tel que tout point x de la base X de (X, \mathcal{O}_X) possède un voisinage ouvert U tel que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ soit isomorphe^(*) à un modèle d'espace analytique 1.3)

NB : On peut définir un espace anal. complexe par recouvrement de cartes (cf Grothendieck)

D'après cette définition 1.4, si (X, \mathcal{O}_X) est un espace analytique, alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est local et noethérien pour tout $x \in X$

On obtient la catégorie des espaces analytiques en prenant pour morphismes les morphismes d'espaces annelés en \mathbb{C} -algèbres. Ces morphismes seront "locaux" (cf 2.1 p 48)
Notons $\text{Mor}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes d'espaces analytiques de X vers Y .

Soit A et B 2 faisceaux sur X :

(**) Rappel : 1) $(A/B)|_U = A|_U / B|_U$ i.e $|_U$ passe au quotient car $|_U = i^{-1}(\cdot)$ est un foncteur exact

2) $(A/B)_x = A_x / B_x \quad \forall x \in X$ car $(\cdot)_x$ est un foncteur exact (cf \varprojlim est exact)

3) Attention ! Si $U \subset X$ $(A/B)(U) \neq A(U)/B(U)$ car le foncteur section sur un ouvert est seulement exact à gauche.

(*) entant qu'espaces annelés en \mathbb{C} -algèbres.

1.5 Sous-espace analytique ouvert : C'est un sous-espace annelé ouvert de X .

Si $U \subseteq X$, c'est $(U, \mathcal{O}_X|_U)$
C'est encore un espace analytique de façon triviale.

1.6 Sous-espace analytique fermé : C'est un sous-espace annelé fermé défini par un idéal de type fini.

On ajoute la condition "de type fini" pour pouvoir montrer que

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \doteq \left(\text{Supp } \mathcal{O}_X/I, \left(\frac{\mathcal{O}_X}{I} \right) \Big|_{\text{Supp } \mathcal{O}_X/I} \right)$$

est encore un espace analytique :

preuve : (les notations sont celles du 11.3 chap 4.)

$\forall y \in X$

I de type fini $\Rightarrow \exists V$ ouvert de X $y \in V$ et $I|_V$ engendré par des sections $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_X(V)$ sur V .

$$Y = \text{Supp } \mathcal{O}_X/I \Rightarrow Y \cap V = \{x \in V / f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\}$$

$$\mathcal{O}_Y|_{Y \cap V} = \left(\frac{\mathcal{O}_V}{(f_1, \dots, f_p)} \right) \Big|_{Y \cap V} \quad \text{où l'on pose } \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V$$

Mais $\mathcal{O}_V = \left(\frac{\mathcal{O}_U}{(g_1, \dots, g_s)} \right) \Big|_V$ quitte à diminuer V , car $\left. \begin{array}{l} \text{X est un espace analytique, où U est un ouvert de } \mathbb{C}^n. \\ \end{array} \right\} (*)$

$f_i \in \mathcal{O}_V(V)$ donc il existe $h_i \in \mathcal{O}_U(U)$ tel que $f_i = h_i$, quitte à diminuer U (retourner aux germes, après l'identification $(*)$ on a

$$(\mathcal{O}_V)_x = \left(\frac{\mathcal{O}_U}{(g_1, \dots, g_s)} \right) \Big|_V \Big|_x = \frac{\mathcal{O}_{U,x}}{(g_{1,x}, \dots, g_{s,x})}, \text{ cf } (**) \text{ rappels ci-dessous,}$$

donc $f_{i,x} = h_{i,x}$ et il suffit d'épaissir U autour de x . On diminue U , au besoin, car $h_{i,x}$ peut ne pas être défini sur tout U ! l'isomorphisme étant certain au niveau des fibres, mais pas pour les sections car $(A/B)(U) \neq A(U)/B(U)$, cf rappels $(**)$ ci-dessous)

Alors :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y|_{Y \cap V} = \left(\frac{\mathcal{O}_V}{(f_1, \dots, f_p)} \right) \Big|_{Y \cap V} & = & \frac{\mathcal{O}_U}{(h_1, \dots, h_p, g_1, \dots, g_s)} \\ \downarrow \varphi & \xrightarrow{\quad} & \left(\frac{\mathcal{O}_U}{(g_1, \dots, g_s)} \right) \Big|_U \xrightarrow{\quad} \mathcal{O}_U \text{ car } \mathcal{O}_U / (g_1, \dots, g_s) = \mathcal{O}_V \\ \mathcal{O}_U / \ker \varphi = \frac{\mathcal{O}_U}{(f_1, \dots, f_p)} & \xrightarrow{\quad} & \left(\frac{\mathcal{O}_U}{(g_1, \dots, g_s)} \right) \Big|_U \end{array}$$

2. Morphismes d'espaces analytiques

2.1 Proposition : Si $\varphi: X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces analytiques, si $x \in X$ et $y = \varphi(x)$ alors l'homomorphisme de \mathbb{C} -algèbres

$$\varphi_x^*: \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

est local (ie $\varphi_x^*(\mathcal{M}_{Y,y}) \subset \mathcal{M}_{X,x}$)

preuve: Notons $\varphi = (\varphi, \bar{\varphi})$ où $\bar{\varphi} \in \text{Hom}(\mathcal{O}_Y, \varphi_* \mathcal{O}_X) = \text{Hom}(\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X)$
La fibre de $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ au dessus de x est $\mathcal{O}_{Y,y}$ d'où

$$\varphi_x^* \doteq \bar{\varphi}_x: \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \quad (\text{par passage à la limite inductive.})$$

Soient E_x (resp E_y) le morphisme d'évaluation en x de X (en y de Y)

On a : E_x induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{M}_{X,x} \xrightarrow{E_x} \mathbb{C}$.

E_x et φ_x^* sont surjectives et appliquent 1 sur 1.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,y} & \xrightarrow{\varphi_x^*} & \mathcal{O}_{X,x} \\ & \searrow E_y & \swarrow E_x \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(E_x \circ \varphi_x^*) \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{E_x \circ \varphi_x^*} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

donc $\mathcal{O}_{Y,y} / \text{Ker}(E_x \circ \varphi_x^*) \cong \mathbb{C}$ est un corps, donc $\text{Ker}(E_x \circ \varphi_x^*)$ est un idéal

maximal, càd $\text{Ker}(E_x \circ \varphi_x^*) = \mathcal{M}_{Y,y}$ car $\mathcal{O}_{Y,y}$ est local.

Comme $\mathcal{M}_{X,x} = \text{Ker } E_x$, on en déduit que

$$\boxed{\varphi_x^*(\mathcal{M}_{Y,y}) \subset \mathcal{M}_{X,x}}$$

cfp

$$\text{NB: } \boxed{E_x \circ \varphi_x^* = E_y}$$

$$\begin{aligned} \text{En effet } E_x \circ \varphi_x^*(h) = \lambda &\Rightarrow E_x \circ \varphi_x^*(h - \lambda) = 0 \\ \stackrel{\text{NB}}{\mathbb{C}} &\Rightarrow h = \lambda + m \quad m \in \mathcal{M}_{Y,y} = \text{Ker } E_y \\ &\Rightarrow E_y(h) = E_y(\lambda) = \lambda E_y(1) = \lambda \end{aligned}$$

$$\text{Finalement } E_x \circ \varphi_x^* = E_y$$

2.2 Application: $X: y^2 - x^3 = 0 \subset \mathbb{A}^2$

$$\mathcal{O}_X = \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}}{(y^2 - x^3)^2} \right) \Big|_X$$

Alors

$$\varepsilon'_{(1,1)}(\widehat{f(n,y)}) = f(1,1) = \text{évaluation de } \widehat{f(n,y)} \text{ en } (1,1)$$

X puisque
il faut évaluer

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, (1,1)} \xrightarrow{\varphi_{(1,1)}^*} \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}}{(y^2 - x^3)^2} \right) \Big|_{X, (1,1)} \xrightarrow{\varepsilon'_{(1,1)}} \mathbb{C}$$

$$\varphi: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

$$\text{car } \varphi^*: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, \varphi(n)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$$

2.3 Exemples

a) Si $U \subset \mathbb{A}^n$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$, $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{A}^n$ détermine canoniquement un morphisme d'espaces annelés en définissant le comorphisme:

$$f^*: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n} \longrightarrow f_* \mathcal{O}_U$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_U & & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}^n \end{array}$$

$$\text{par, } \forall V \subset \mathbb{A}^n \quad f^*(V): \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(V) \xrightarrow{g} f_* \mathcal{O}_U(V) \doteq \mathcal{O}_U(f^{-1}(V))$$

b) Voici un exemple où f^* ne dépend pas de f :

$$\begin{array}{ccc} X=Y=(2, \mathbb{A}^2, y^2) & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}/(y^2) \Big|_{(y=0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (y=0) & \xrightarrow{f=\text{Id}} & (y=0) \end{array}$$

où l'on définit $f^*(f_0 + y f_1) = f_0$.
On vérifie que (f, f^*) est un morphisme d'espaces annelés en \mathbb{C} -algèbres locales.

Notations:

$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) =$ ensemble des morphismes de faisceaux,
 $\text{Morph}(X, Y) =$ ensemble des morphismes d'espaces annelés,
 $\text{Mor}(X, Y) =$ " " " d'espaces analytiques.

2.4 Théorème

z_1, \dots, z_n coordonnées de \mathbb{C}^n , X espace annelé

$$\begin{array}{ccc} \text{Morph}(X, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_X} & (\mathcal{O}_X(X))^n \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi_i = \varphi^*(z_i))_{1 \leq i \leq n} \end{array}$$

σ_X est bien définie car $\varphi^* : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$ et $z_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$, donc $\varphi^*(z_i) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(\mathbb{C}^n)) = \mathcal{O}_X(X)$ car φ est une application.
 (par abus, on écrit $\varphi^*(z_i)$ au lieu de $\varphi^*(\mathbb{C}^n)(z_i)$, abus que l'on fera constamment par la suite)

Alors σ_X est bijective et dépend fonctériellement de X .

preuve:

Dire que σ_X dépend fonctériellement de X signifie que, pour tout $\alpha \in \text{Morph}(Y, X)$ le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccccc} \beta & \text{Morph}(X, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_X} & \mathcal{O}_X(X)^n & Y \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}^n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \alpha^*(X) & \\ \beta \circ \alpha & \text{Morph}(Y, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_Y} & \mathcal{O}_Y(Y)^n & \alpha = (\alpha, \alpha^*) \text{ où } \alpha^* \in \text{Hom}(\mathcal{O}_X, \alpha_* \mathcal{O}_Y) \end{array}$$

En d'autres termes, $\sigma = \{\sigma_X\}_X$ est un morphisme de foncteurs entre le foncteur $X \mapsto \text{Morph}(X, \mathbb{C}^n)$ et le foncteur $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)^n$

a) σ_X dépend fonctériellement de X :

$$\begin{array}{ccc} (\varphi, \varphi^*) \in \text{Morph}(X, \mathbb{C}^n) & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ (\varphi \circ \alpha, \varphi_* (\alpha^*) \circ \varphi^*) \in \text{Morph}(Y, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_Y} & \mathcal{O}_Y(Y)^n \\ & \longmapsto & \varphi_* (\alpha^*) \circ \varphi^*(z_i) \end{array}$$

$$\varphi_* f: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$$

$$\alpha^*: \mathcal{O}_X \rightarrow \alpha_*(\mathcal{O}_Y) \Rightarrow \varphi_*(\alpha^*): \varphi_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow \varphi_* \alpha_* \mathcal{O}_Y$$

donc $\varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^*: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow (\varphi \circ \alpha)_* \mathcal{O}_Y = \varphi_*(\alpha_* \mathcal{O}_Y)$ est bien définie.

$$\varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^*(z_i) = \varphi_*(\alpha^*) \varphi_i \quad \text{où } \varphi_i \in \mathcal{O}_X(X)$$

(on devrait écrire $(\varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^*)(\mathbb{C}^n)(z_i) = \varphi_*(\alpha^*)(\mathbb{C}^n) \circ \varphi^*(\mathbb{C}^n)(z_i)$ ce qui complique les notations. Avec cet abus:)

$$\varphi_*(\alpha^*)(\mathbb{C}^n) \underset{\text{abus}}{=} \varphi_*(\alpha^*) \in \text{Hom}(\varphi_* \mathcal{O}_X(\mathbb{C}^n), \varphi_* \alpha_* \mathcal{O}_Y(\mathbb{C}^n)) = \text{Hom}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y))$$

et par définition du foncteur φ_* "image directe de faisceaux", on a:

$$\varphi_*(\alpha^*)(\mathbb{C}^n) = \alpha^*(\varphi^{-1}(\mathbb{C}^n)) = \alpha^*(X)$$

$$\text{Donc: } \varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^*(z_i) = \alpha^*(X)(\varphi_i) = \alpha^*(X) \circ \sigma_Y(\varphi)$$

et la commutativité du diagramme est démontrée.

b) Surjectivité de σ_X dans le cas lisse:

On a vu (lec 2.3 a)) que si $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n)$, $\beta: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ détermine canoniquement un morphisme $\beta \in \text{Morph}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$

Supposons $X = \mathbb{C}^m$ et soit $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n)^n$.

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \text{Morph}(X, \mathbb{C}^n)$ vérifie $\sigma_X(\beta) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ puisque

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^m = X & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{z_i} & \mathbb{C} \\ x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & (\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)) & \longmapsto & \beta_i(x) \end{array}$$

c) Surjectivité de σ_X dans le cas où X n'est pas lisse:

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{O}_X(X)^n$.

On peut supposer que

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m} / (b_1, \dots, b_g) \Big|_{\text{Support} = X}$$

puisque le problème est local (on recollerait ensuite les sections obtenues grâce à l'unicité de l'antécédent montré en d))

$$\exists U \in \mathbb{C}^n \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U) \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_U / (\beta_1, \dots, \beta_g) & \xrightarrow[\text{quotient}]{\varphi_i = \bar{\varphi}_i, \text{ passage au}} & \mathcal{O}_U \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Supp } \mathcal{O}_U / (\beta_1, \dots, \beta_g) = U \cap X & \xrightarrow{i} & U \xrightarrow{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} \mathbb{C}^n \end{array}$$

$U \cap X \xrightarrow{i} U$ est une immersion fermée, et $U \cap X$ est un sous-espace analytique fermé de U associé à l'idéal $(\beta_1, \dots, \beta_g)$, puisque $X = \text{Supp}(\beta_1, \dots, \beta_g) \doteq \text{Supp } \mathcal{O}_U / (\beta_1, \dots, \beta_g)$

$$(\text{écure: } \{\text{Supp } \mathcal{O}_U / (\beta_1, \dots, \beta_g)\} = \{x \in U / \exists i \, \beta_i(x) \neq 0\} = \{x \in U / \beta_1(x) = \dots = \beta_g(x) = 0\})$$

Le morphisme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \circ i \in \text{Horph}(U \cap X, \mathbb{C}^n)$ définit bien $\varphi \in \text{Horph}(X, \mathbb{C}^n)$ tel que $\sigma_x(\varphi) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

σ_x est surjective.

d) Unicité de l'antécédent: Il faut vérifier que

$$\varphi^* z_i = \beta_i \quad \forall i \Rightarrow (\varphi, \varphi^*) \text{ unique (tel que } \sigma_x(\varphi) = (\beta_1, \dots, \beta_n))$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} z_i & \xrightarrow{\quad} & \varphi^* z_i = \beta_i \\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \varphi(n)} & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{O}_{X, x} \\ \swarrow \varepsilon_{\varphi(n)} & & \searrow \varepsilon_x \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

est commutatif.

$$i\text{-coordonnée de } \varphi(n) = \varepsilon_x(\beta_i)$$

$$\varphi(n) = (\varepsilon_x(\beta_1), \dots, \varepsilon_x(\beta_n)) \text{ donc } \varphi \text{ est unique.}$$

Unicité de φ^* : i.e. $\forall a \in X \quad \varphi_a^*$ est unique

$\varphi_a^*(z_i - a) = \beta_i - a$, donc s'il existait 2 tels morphismes φ^* et φ'^* , on aurait:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, a} = \mathbb{C}\{z_i\} & \xrightarrow{\varphi_a^* - \varphi'_a} & \mathcal{O}_{X, x} \\ z_i & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \varphi_a^*(\lambda) = \varphi'_a^*(\lambda) = \lambda & \text{si } \lambda \in \mathbb{C} \\ \varphi_a^*(z_i^k) \neq \varphi'_a^*(z_i^k) = 0 & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Posons $\tilde{\varphi}_a^* = \varphi_a^* - \varphi'_a{}^*$. $\forall f \in \mathbb{C}\{z_i\}$,

$$\tilde{\varphi}_a^*(f) = \tilde{\varphi}_a^* \left(\underbrace{\text{polynôme}}_{\tilde{\varphi}_a^* \text{ s'annule sur les polynôme}} + \underbrace{\sum_{i \geq R} a_i z_i^R}_{\in \mathcal{M}_{\varphi(a)}^R} \right) \in \tilde{\varphi}_a^*(\mathcal{M}_{\varphi(a)}^R) \subset \mathcal{M}_a^R \quad (\text{car } \tilde{\varphi}_a^* \text{ est local})$$

donc $\tilde{\varphi}_a^*(f) \in \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{M}_a^k = \{0\}$ d'après la prop.

puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien.

CQFD

2.5 Proposition : Soit X un espace analytique et $U \in X$.

La correspondance $U \mapsto \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n) =$ morphismes de la catégorie des espaces analytiques définit un faisceau, et $\sigma = \{\sigma_U\}_{U \in X}$ où :

$$\sigma_U : \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)^n$$

est un isomorphisme de faisceau.

preuve :

$U \mapsto \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n)$ est un préfaisceau : si $U \subset V$, on définit les restrictions $\text{Mor}(V, \mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n)$ par composition avec le morphisme canonique d'espaces analytiques $U \hookrightarrow V$.

On vérifie facilement qu'il s'agit d'un faisceau.

$\sigma_U : \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)^n$ est un morphisme de faisceau puisque dépendant fonctiellement de U (cf Th 2.4 pour $\alpha = i : U \hookrightarrow V$:

$$\begin{array}{ccc} \beta & \text{Mor}(V, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_V} \mathcal{O}_V(U)^n = \mathcal{O}_X(U)^n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow i^* \\ \beta \circ i & \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_U} \mathcal{O}_V(V)^n = \mathcal{O}_X(V)^n \end{array}$$

Enfin $\{\sigma_U\}_{U \in X}$ est un isomorphisme car σ_U est bijective pour tout U d'après le théorème 2.4.

CQFD

exercice : Y, X = espaces annelés

$f: X \rightarrow Y$ morphisme d'espaces annelés

$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ -module et $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y$ -module.

Montrer que :

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^* \mathcal{G}, \mathcal{F})$$

2.6 Définition :

Soient $X = (m, U, f_1, \dots, f_p)$

$Y = (n, V, g_1, \dots, g_q)$

$\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces analytiques

$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n): U \rightarrow V$ le morphisme associé canoniquement aux n fonctions analytiques $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$ (cf 2.3 a))

On dira que φ est induit par $\tilde{\varphi}$ si (1) \Leftrightarrow (2) est vrai :

(1) $\forall g \in \mathcal{I}_Y \quad \tilde{\varphi}^*(g) \in \mathcal{I}_X$

(2) $\forall x \in X \quad \forall j \in [1, q] \quad \exists \alpha_j^i \in \mathcal{O}_{X, x} \quad g_j(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n) = \sum_{i=1}^p \alpha_j^i f_i$

(NB: \mathcal{I}_X = idéal (f_1, \dots, f_p) dans \mathcal{O}_U)

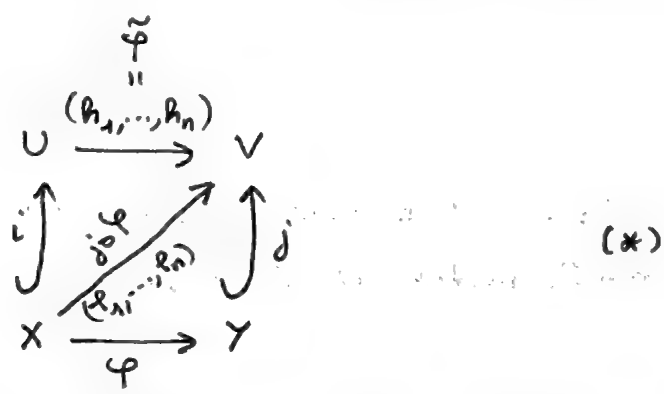
2.7 Scholie : Pour étudier un morphisme analytique $\varphi: X \rightarrow Y$ localement en $x \in X$, on pourra supposer que

$X = (m, U, f_1, \dots, f_p)$

$Y = (n, V, g_1, \dots, g_q)$

et que $\varphi: X \rightarrow Y$ est induit par un morphisme $\tilde{\varphi}: U \rightarrow V$ associé canoniquement à n fonctions analytiques $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$.

preuve : Pour avoir $X = (m, U, f_1, \dots, f_p)$ et $Y = (n, V, g_1, \dots, g_q)$ il suffit de prendre des ouverts U et V tels que $\varphi(U) \subset V$ et d'utiliser la déf. des espaces analytiques.

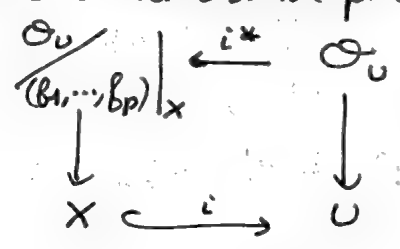


$i : X \hookrightarrow U$ est un morphisme d'espaces analytiques déterminé avec le sous-espace annelé fermé X de U défini par l'idéal $(b_1, \dots, b_p) = \mathcal{I}_X$. On rappelle en effet que :

$$X = (m, U, b_1, \dots, b_p) \doteq \left(X = \text{Supp } \frac{\mathcal{O}_U}{(b_1, \dots, b_p)}, \mathcal{O}_X = \frac{\mathcal{O}_U}{(b_1, \dots, b_p)} \Big|_X \right)$$

où $X = \text{Supp } \frac{\mathcal{O}_U}{(b_1, \dots, b_p)} = \{x \in U / b_1(x) = \dots = b_p(x) = 0\} \subset U$

Le comorphisme i^* est obtenu par passage au quotient :



car $i^* \in \text{Hom} \left(\mathcal{O}_U, i_* \left(\frac{\mathcal{O}_U}{(b_1, \dots, b_p)} \Big|_X \right) \right)$

$$\text{et } i_* \left(\frac{\mathcal{O}_U}{(b_1, \dots, b_p)} \Big|_X \right)(V) = \frac{\mathcal{O}_U}{(b_1, \dots, b_p)} \Big|_X (V \cap X) \quad \forall V \in U$$

$$j \circ \varphi \in \text{Morph}(X, V) = \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{O}_X(X)^n / \forall x \right. \\ \left. (\varepsilon_x(\varphi_1), \dots, \varepsilon_x(\varphi_n)) \in V \right\}$$

On écrit $j \circ \varphi \doteq (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ par abus

Suite à diminuer U , on peut supposer que $\varphi_i = h_i$ où $h_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U)$

On a $j \circ \varphi = (h_1, \dots, h_n) \circ i$ d'après la démonstration 2.4 c), donc le diagramme (*) commute.

On pose $\tilde{\varphi} = (h_1, \dots, h_n)$.

Vérifions que φ est induit par $\tilde{\varphi} = (h_1, \dots, h_n)$:

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{I}_Y \quad \tilde{\varphi}^*(g) \in \mathcal{I}_X &\Leftrightarrow g(h_1, \dots, h_n) \in \mathcal{I}_X \\ &\Leftrightarrow g(h_1, \dots, h_n)|_X = i^*(g(h_1, \dots, h_n)) = 0 \\ &\text{dans } \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_U / (b_1, \dots, b_p)|_X \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}^* s = g(h_1, \dots, h_n) \in \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{O}_U)(\Omega)$$

$$\tilde{\varphi}^*(s) = g(h_1, \dots, h_n) \in \mathcal{O}_U(\tilde{\varphi}^{-1}(\Omega))$$

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\varphi}^*(s)}|_X &= i^*(i^{-1}(\tilde{\varphi}^*(s))) \quad \text{car } i^* \in \text{Hom}(i^{-1}\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_X) \\ &= i^*((i^{-1}\tilde{\varphi}^*)(i^{-1}(s))) \end{aligned}$$

Comme $(\tilde{\varphi} \circ i)^* = i^* \circ i^{-1}(\tilde{\varphi}^*)$ par définition de la composée de comorphismes, et comme $s = \tilde{\varphi}^{-1}(g)$, on obtient : (*)

$$\overline{\tilde{\varphi}^*(s)}|_X = (\tilde{\varphi} \circ i)^*(i^{-1}(\tilde{\varphi}^{-1}(g)))$$

$$\text{or } i^{-1} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(g) = (\tilde{\varphi} \circ i)^{-1}(g) = \varphi^{-1} \circ j^{-1}(g) \text{ car } j \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ i, \text{ donc :}$$

$$\overline{\tilde{\varphi}^*(s)}|_X = (j \circ \varphi)^*(\varphi^{-1} \circ j^{-1}(g))$$

$$= \varphi^* \circ \varphi^{-1}(j^*)(\varphi^{-1} j^{-1}(g)) \quad (\text{cf composée de comorphismes}) (*)$$

$$= \varphi^* \circ \varphi^{-1}(j^*(j^{-1}(g))) \quad (**)$$

$$= 0 \quad \text{car } \underbrace{j^*(j^{-1}(g))}_{\substack{\text{passage au} \\ \text{quotient}}} = 0 \Leftrightarrow g \in \mathcal{I}_Y$$

$$\text{donc } s \in \mathcal{I}_X$$

CQFD

(*) $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{j} V$ $(j \circ \varphi)^* \in \text{Hom}((j \circ \varphi)^{-1}\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X)$ est déterminé comme suit : $(j \circ \varphi)^{-1}\mathcal{O}_V = \varphi^{-1}(j^{-1}\mathcal{O}_V)$

$$\varphi^* : \varphi^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$$

$$j^* : j^{-1}\mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_Y \Rightarrow (\varphi^{-1} \text{ foncteur}) \quad \varphi^{-1}(j^*) : \varphi^{-1}(j^{-1}\mathcal{O}_V) \rightarrow \varphi^{-1}\mathcal{O}_Y$$

$$\text{On prend } (j \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \varphi^{-1}(j^*)$$

(*) Explicitons le foncteur φ^{-1} dans le cas : $X \xrightarrow{\varphi} Y$ Si σ est déterminée par une section globale de \mathcal{O}_Y , disons $s \in \mathcal{F}(Y)$, notons $\sigma = \varphi^{-1}(s)$ $= \varphi \circ \sigma$. Alors $\varphi^{-1}(j^*(\varphi^{-1}(s))) = j^* \circ \sigma = j^* \circ \varphi \circ \sigma = \varphi^{-1}(j^*(\varphi \circ \sigma))$ ie $\boxed{\varphi^{-1}(j^*(\varphi^{-1}(s))) = \varphi^{-1}(j^*(\varphi \circ \sigma))}$

2.7.1 Remarque:

Si $\tilde{\varphi} = (h_1, \dots, h_n): U \rightarrow V$ possède la propriété d'induction, ie si $\forall g \in \mathcal{I}_V \quad \tilde{\varphi}^*(g) \in \mathcal{I}_U$, alors il existe un unique morphisme $\varphi: X \rightarrow Y$ rendant le diagramme ci-contre commutatif.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & V \\ \uparrow i & & \uparrow j \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

preuve:

$x \in X \Rightarrow (h_1(x), \dots, h_n(x)) \in V$ car $g_i(h_1(x), \dots, h_n(x)) = 0$, donc φ est défini ensemblistement.

Unité de φ^* :

$\mathcal{O}_V|_Y \xrightarrow{j^*} \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ est la surjection canonique.

On a:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\varphi} \circ i)^*(\mathcal{O}_V) = \varphi^{-1}(j^*\mathcal{O}_V) = \varphi^{-1}(\mathcal{O}_V|_Y) & \xrightarrow{\varphi^{-1}(j^*)} & \varphi^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow 0 \\ & \searrow (\tilde{\varphi} \circ i)^* & \downarrow \varphi^* \\ & & \mathcal{O}_X \text{ unique} \end{array}$$

Comme $\varphi^{-1}(j^*)$ est surjective, φ^* est rendant ce triangle commutatif.

Existence: par passage au quotient

$$\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_V / \mathcal{I}_X|_X = \mathcal{O}_X$$

Pour W assez petit:

$\forall \mathcal{R} \in \varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y)(W)$, localement $\mathcal{R}|_W \cap \varphi^{-1}(\mathcal{R} \cap Y) = \varphi^{-1}(\mathcal{R})$ où $\mathcal{R} \in \mathcal{O}_Y$, et $\mathcal{R} = \mathcal{E}$ ou $\mathcal{E} \in \mathcal{O}_V(\mathcal{R})$ (quitte à prendre \mathcal{R} plus petit).

On pose $\varphi^*(\mathcal{R}|_W) \doteq i^*(i^{-1}\tilde{\varphi}^*(\mathcal{R}|_W))$ et on vérifie que

* $\varphi^*(\mathcal{R}|_W)$ ne dépend pas du représentant \mathcal{E} choisi

* se recollent bien.

Espaces projectifs

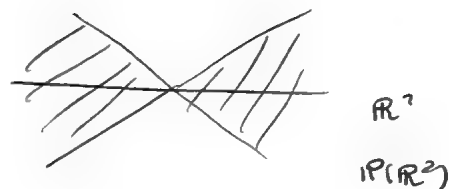
E est de dimension $n+1$ sur \mathbb{C}

$$\mathbb{P}(E) = E \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* \quad u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \quad u = \lambda v$$

$\mathbb{P}(E)$ est muni de la topologie quotient.

$$E \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}(E)$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(V) = \mathcal{O}_E(\pi^{-1}(V))$$



Proposition : $\mathbb{P}(E)$ est une variété analytique (ie un espace analytique tel que tout point possède un voisinage isomorphe à un modèle lisse). On montre aussi que l'on a un isom. can avec une structure de variété anal. au sens classique

$V_1 = \pi(U_1)$ est un ouvert de $\mathbb{P}(E)$

$U_1 = E \setminus \{0\}$ avec la 1^{ère} coordonnée non nulle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)|V_1} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_1 & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}^n \end{array} \quad \text{continue et } \beta^* \text{ isomorphisme. Alors on}$$

$$(\beta_1, \dots, \beta_{n+1}) \mapsto \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \dots, \frac{\beta_{n+1}}{\beta_1} \right)$$

montre que β est un isomorphisme d'espaces annelés :

Définition

Soit X esp. analytique. On dit que X est lisse de dimension n en x si $X \simeq (n, \mathbb{C})$ soit isomorphe à un modèle lisse de dim n localement en x .

On dit que X est une variété si X est lisse en tout point $x \in X$. On dit que x est dit régulier (resp. singulier) si X est lisse en x (resp. sinon).
L'ensemble des pts réguliers est ouvert de X .

Espace tangent de Zariski

$X = (n, U, f_1, \dots, f_p)$ est un modèle

$X \hookrightarrow U$ immersion analytique
 $x=0$ 0

$\vec{E} \in \mathbb{C}^n$ vecteur tangent \forall si $\vec{E} \in T_x X$ $df_1(\vec{E}) = \dots = df_p(\vec{E}) = 0$ ie $\vec{E} \in \ker df(0)$

$X = : y^2 - x^3 = 0$ $\forall \vec{E} \in \mathbb{C}^2$ est tangent à X à l'origine $\dim T_0 X = 2$
(pour un pt lisse $\dim T_0 X = 1$) car $df(x,y) = (-3x^2, 2y) = 0$ en $(x,y) = (0,0)$

Plus généralement :

X s.p. analytique

$T_x X =$ eno. de classe d'équiv. des couples (\vec{E}, φ) par R où :

φ cartes de X , $\varphi(x)=0$, $(\vec{E} \in \ker df(0), \varphi) R (\vec{E}' \in \ker df(0), \varphi')$
 $\vec{E}' = d\lambda(0) \cdot \vec{E}$ où λ est induit par $\varphi \varphi^{-1}$ (et au sens 2.7)
On vérifie que c'est indépendant de λ

Lemme :

\mathfrak{m}_x idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors $(T_x X)^* \simeq \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$

preuve : $\vec{E} \in T_x X$ $\vec{E} = (\vec{E}, \varphi)$

$u \in \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ est représenté par un élément $\alpha \in \mathfrak{m}_0$
 $\mathfrak{m}_0 =$ idéal max de $\mathcal{O}_{U,0}$

$\mathcal{O}_X \ni \alpha^* = u$
 $\mathcal{O}_U \ni \alpha$

$\langle \vec{E}, u \rangle = \sum d\alpha(0) \cdot \vec{E}$ est indépendant du choix de carte et de la classe (le 2-prést initial : si $u \in \mathfrak{m}_x^2$, $\alpha \in \mathfrak{m}_0^2 \Rightarrow d\alpha(0) = 0$)

$\alpha \mapsto \alpha^* = u$

(NB : $\text{Hom}(\mathcal{O}_{U,0}/\mathfrak{m}_0^2, \mathcal{O}_{X,x})$ $\xrightarrow{\varphi^*}$ $\text{Hom}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_X)$)

est surjectif car

$X = (n, U, f_1, \dots, f_p)$
 $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_X$
 $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_X$
 $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_X$

$$X \simeq (n, U, b_1, \dots, b_p) \quad \vec{t} \in \mathbb{C}^n \mid d\beta(\omega)(\vec{t}) = 0$$



$$\left\{ \begin{array}{l} m_n \simeq m_0 \left(\frac{\mathcal{O}_U}{(p_i, b_p)} \Big|_X \right) \\ \alpha \in \mathcal{O}_U \text{ représentant de } \mathcal{O}_U \\ u \in m_n / m_n^2 = u_\varphi \in \dot{m}_0 / m_0^2 \\ \text{on définit alors} \\ T_n X = (t, \varphi) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d'où : prendre la bijection } \varphi \text{ et } \psi \\ \varphi_n^* \quad \psi_n^* \\ \varphi_n^* \circ \psi_n^{*-1} = \text{id} \end{array} \right.$$

$$\langle u, \vec{t} \rangle = \langle d\alpha(0), \vec{t} \rangle \quad \text{indép. de tout.}$$

d'où :

$$\left. \begin{array}{ccc} m_n / m_n^2 & \xrightarrow{\quad} & (T_n X)^* \\ u & \longmapsto & \langle u, \cdot \rangle \end{array} \right\} \text{montrer que c'est une bijection}$$

Application linéaire tangente :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\beta} & Y & & \beta(m) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \\ (n, U, b_1, \dots, b_p) & \xrightarrow{\beta} & (m, V, g_1, \dots, g_r) & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ U & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & V & & \end{array}$$

$$T_n \beta(\vec{t}) = (d\tilde{\beta}(0)(\vec{t}), \varphi) \quad \text{où } \vec{t} = (t, \varphi)$$

Alors : $T_n(\beta \circ \gamma) = T_{\beta(\gamma)} \beta = T_n \gamma$

Proposition: $X = (n, v, f_1, \dots, f_p)$
 $x \in X$

$\exists V$ voisinage ouvert de x dans U

$\exists S$ sous-espace linéaire de V

tels que 1) $X \cap V = \emptyset$ sous-espace de S

$$2) T_x X = T_x S$$

ex: $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}^2, y^2 - x^3) \Rightarrow S = \mathbb{Q}^2$ on $(u, y) = (0, 0)$

$df_1(\omega), \dots, df_p(\omega)$ indépendants $\Rightarrow X$ libre en x

On peut toujours supposer $\{ \text{générateurs de } df_1(x), \dots, df_p(x) \}$
 $df_1(x), \dots, df_r(x)$ indépendants. $p_1 = \dots = p_r = 0$ définir une
 variété analytique lisse V (qui se à dimension V)

$$\left\{ \begin{array}{l} X \cap V \longrightarrow \overbrace{(n, v, b_1, \dots, b_n)}^{\text{liose}} = S \quad \begin{array}{l} \text{remarque injection} \\ \text{en fait: passage au quotient} \end{array} \\ T_x X = T_x \not\cong S \\ X \cap V = \text{sous-espace de } (n, v, b_1, \dots, b_n) \text{ car est 1 sous-espace ferm\u00e9} \\ \text{associ\u00e9 \u00e0 l'id\u00e9al } (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n) \end{array} \right.$$

Corollaire $\varphi: X \rightarrow Y \quad \varphi(x) = y$

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \text{idéal maximal de } \mathcal{O}_{X,x} \\ \mathfrak{N} &= \text{ " " " de } \mathcal{O}_{Y,y} \end{aligned}$$

$\varphi_x^*: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit un homomorphisme $\doteq d\varphi(x) \doteq: \frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{M}_y} \rightarrow \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_x}$

Propriétés ~ :

(1) φ plongement local en x (ie $\exists X'$ vois de x dans X
 $\exists Y' \subset Y$ " " " " y " " y $\varphi: X' \rightarrow Y'$ plongement
 fermé (*))

(2) φ_x^* surjective

(3) $d\varphi(x)$ surjective

(4) $T_x \varphi$ injective

1(*) $f: X' \rightarrow Y'$ plongement fermé si $X' \xrightarrow[\sim]{\text{ana.}} Z' \xrightarrow{\text{isomorph}} Y'$ où Z' = sous-espace fermé de Y'

3. Produits fibrés d'espaces analytiques

Soient X et Y deux espaces analytiques. On définit le produit $X \times Y$ et le produit fibré $X \times_S Y$ lorsque la situation suivante nous est donnée :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow g & \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

par les propriétés universelles :

(PUP) Le produit $X \times Y$ est donné avec les 2 projections π_1 et π_2 , et pour tout espace analytique A , pour tous morphismes s et t de A dans X et de A dans Y respectivement, il existe une et une seule factorisation de s et t à travers $X \times Y$, ie :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow & \uparrow \pi_1 \\ & & X \times Y \\ & \swarrow & \downarrow \pi_2 \\ Y & \xleftarrow{t} & \end{array}$$

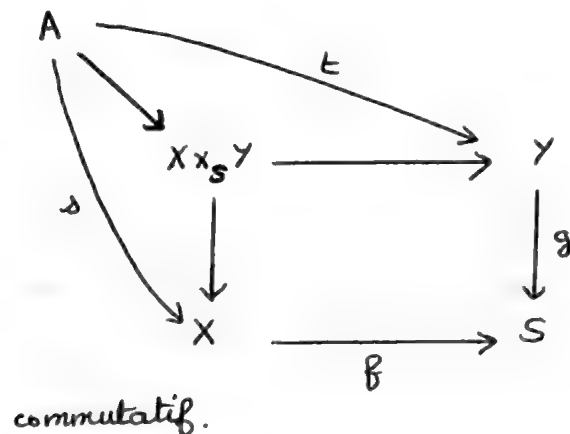
(PUF) Le produit fibré $X \times_S Y$ de X et Y au dessus de S est la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

dans la catégorie des espaces analytiques, qui vérifie la propriété universelle suivante :

Pour tout diagramme commutatif $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$ il existe une flèche \rightarrow

et une seule rendant le diagramme :



3.1 Théorème : Dans la catégorie des espaces analytiques, le produit et le produit fibré existent, et le foncteur de la catégorie des espaces analytiques dans celle des espaces topologiques qui à chaque espace analytique fait correspondre l'espace topologique sous-jacent, commute au produit fibré.

NB: Ce th. a l'air faux dans la catégorie des espaces annelés.

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs lemmes: les lemmes 3.1.1 à 3.4 montrent l'existence du produit $X \times Y$. De là on déduit l'existence de $X \times_S Y$.

Lemme 3.1.1: Le produit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ existe dans la catégorie des espaces analytiques.

preuve: Remarquons, avant de commencer, que $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ sera le produit fibré au dessus d'un point:

Si $S = \cdot = \text{point}$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^m & \\ & \downarrow & \\ \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \cdot \end{array}$$

Le problème universel du produit fibré est le même que le problème universel du produit, puisque tous les carrés au dessus de $S = \cdot$ seront commutatifs.

d'après le Th 2.4 p 49, $\text{Mor}(X, \mathbb{C}^n) = (\mathcal{O}_X(X))^n$. On peut donc définir φ_1 et φ_2 dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+m} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathbb{C}^m \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \longrightarrow & . \end{array}$$

en prenant :

φ_1 associé à $(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}}(\mathbb{C}^{n+m})$, ie $\varphi_1^*(z_i) = z_i$ ($1 \leq i \leq n$)

φ_2 associé à $(z_{n+1}, \dots, z_{n+m}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}}(\mathbb{C}^{n+m})$, ie $\varphi_2^*(z_{n+i}) = z_{n+i}$ ($1 \leq i \leq m$)

Comme dans la preuve 2.4 p 49 d), on constate que le morphisme d'espaces topologiques sous-jacent à φ_1 est :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 : \mathbb{C}^{n+m} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (a_1, \dots, a_{n+m}) & \longmapsto & (a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

et que le comorphisme est : (cf preuve 2.4 p 49 b)) :

$$\varphi_1^*(a(z_1, \dots, z_n)) = a(z_1, \dots, z_n)$$

Vérifions que $(\mathbb{C}^{n+m}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}})$ est le produit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\theta_2} & \mathbb{C}^m \\ \theta_1 \downarrow & \searrow \theta & \uparrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^n & \xleftarrow{\varphi_1} & \mathbb{C}^{n+m} \end{array}$$

L'existence et l'unicité au niveau des e.t. sous-jacents est évidente. Seuls les comorphismes posent des problèmes :

d'après le Th. 2.4 p 49,

θ_1 est caractérisé par $(\theta_1^*(z_1), \dots, \theta_1^*(z_n)) \in \mathcal{O}_A(A)^n$

θ_2 est caractérisé par $(\theta_2^*(z_{n+1}), \dots, \theta_2^*(z_{n+m})) \in \mathcal{O}_A(A)^m$

Unicité de θ : Si le diagramme ci-dessus commute,

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1^*(z_i) = \theta^*(z_i) \\ \theta_2^*(z_{n+i}) = \theta^*(z_{n+i}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ \text{pour } 1 \leq i \leq m \end{array}$$

donc θ est unique.

(on vérifie que $\theta_1^*(z_i) = (\tau_1 \circ \theta)^*(z_i) = (\tau_{1*} \theta^*)(\tau_1^*(z_i))$
 $= \tau_{1*} \theta^*(z_i)$
 $= \theta^*(z_i)$)

Le dernier point étant la déf. de $\tau_* \theta : \tau_* \mathcal{F} \rightarrow \tau_* \mathcal{G}$ quand $\theta : X \rightarrow Y$, \mathcal{F} faisceau de base X et \mathcal{G} de base Y .)

Existence de θ : On définit θ par les $n+m$ fonctions de $\mathcal{O}_A(A)^{n+m}$ précédentes, ie $\theta_1^*(z_i) (1 \leq i \leq n)$ et $\theta_2^*(z_{n+j}) (1 \leq j \leq m)$
 Le diagramme est bien commutatif:

$$(\tau_1 \theta)^*(z_i) = (\tau_{1*} \theta^*)(\tau_1^*(z_i)) = \tau_{1*} \theta^*(z_i) = \theta^*(z_i) = \theta_1^*(z_i)$$

donc (unicité du Th. 2.4 p 49) $(\tau_1 \theta)^* = \theta_1^*$
 De même pour $\tau_2 \theta$.

CQFD

Lemme 3.1.2:

X, Y espaces analytiques qui possèdent un produit $Z = X \times Y$
 X', Y' sous-espaces analytiques de X , resp. Y . On peut supposer, plus généralement, que $i : X' \hookrightarrow X$ (resp. $j : Y' \hookrightarrow Y$) est une immersion.

Alors le produit $X' \times Y'$ existe.

De plus: i et j immersions ouvertes $\implies i \times j : X' \times Y' \rightarrow X \times Y$ immersion ouverte
 i et j " fermées \implies " " " fermée.

Rappel: On dit que $i : X' \rightarrow X$ est une immersion ouverte (resp. fermée, resp. localement fermée) si

$$X' \simeq X'' \hookrightarrow X \quad \text{et } X'' \text{ sous-esp. analytique ouvert de } X$$

(resp. si $X' \simeq X'' \hookrightarrow X$ et X'' fermé de X)

resp. si $X' \simeq X'' \hookrightarrow X''' \hookrightarrow X$, où X'' fermé de X''' et X''' ouvert dans X)

On dit que $i : X' \rightarrow X$ est une immersion (ou encore un plongement) si $X' \simeq X'' \hookrightarrow X$.

sous-lemme α : Si $Z = X \times Y$ et si Y est un sous-espace fermé de X , toute application $g: Z \rightarrow X$ se factorise de manière unique à travers Y ssi

$$\begin{cases} g(Z) \subset Y \\ g^*(g^{-1}j) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & X \\ \theta \searrow & & \nearrow i \\ & Y & \end{array}$$

preuve :

nécessaire : Si la factorisation a lieu, $g(Z) \subset Y$ et :

$$g^* = (i \circ \theta)^* = \theta^* \circ (\theta^{-1} i^*)$$

Maïs :

$$i^* \in \text{Hom}(i^{-1}\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) = \text{Hom}(\mathcal{O}_X|_Y, \mathcal{O}_X/j|_Y)$$

$$\text{et } \mathcal{O}_X/j|_Y = \mathcal{O}_X|_Y / j|_Y = i^{-1}(\mathcal{O}_X/j)$$

$$\begin{aligned} \theta^{-1} i^* &\in \text{Hom}(\theta^{-1} i^{-1} \mathcal{O}_X, \theta^{-1} i^{-1}(\mathcal{O}_X/j)) = \text{Hom}(g^{-1} \mathcal{O}_X, g^{-1}(\mathcal{O}_X/j)) \\ &= \text{Hom}(g^{-1} \mathcal{O}_X, g^{-1} \mathcal{O}_X / g^{-1} j) \end{aligned}$$

et $\theta^{-1} i^*$ n'est autre que le passage au quotient dans cette identification, donc :

$$g^*(g^{-1}j) = \theta^* \circ (\theta^{-1} i^*(g^{-1}j)) = \theta^*(0) = 0$$

suffisance : le sous-jacent est clair, ensemblistement. Existe-t'il θ^* qui fasse commuter le diagramme sous l'hypothèse $g^*(g^{-1}j) = 0$?

$$\mathcal{O}_Z \xleftarrow{g^*} g^{-1} \mathcal{O}_X$$

$$\swarrow \theta^{-1} i^* = \text{passage au quotient}$$

$$g^{-1} \mathcal{O}_X / g^{-1} j$$

} ici θ est considérée seulement ensemblistement

C'est vrai : on peut toujours trouver $\theta^*: g^{-1} \mathcal{O}_X / g^{-1} j \rightarrow \mathcal{O}_Z$ qui fasse commuter ce diagramme.

C'est général :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xleftarrow{g^*} & \mathcal{O}' \\ \uparrow \theta^* & & \searrow \\ & \mathcal{O}'/j' & \end{array} \quad \text{et } g^* \mathcal{O}' = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xleftarrow{g^*} & \mathcal{O}' \\ \uparrow \theta^* & & \searrow \\ & \mathcal{O}'/j' & \end{array}} \right\} \Rightarrow \theta^* \text{ existe.}$$

sous-lemme β : Si Y est un fermé de X , alors le produit fibré $Z \times_X Y$ existe :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow j & \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array} \quad (Z \text{ esp. anal. quelconque, ici})$$

preuve: \mathcal{I} = idéal définissant Y
 $Z' =$ sous-espace analytique de Z défini par l'idéal $f^*(f^{-1}\mathcal{I})$
 où $f^*: f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Z$ (exemple: si Z et X sont lisses et si Y est défini par les fonctions $g_i(x)=0$, $f^*(f^{-1}\mathcal{I})$ est défini par les $fets$ $g_i \circ f(x)=0$)

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{h} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

$$(f \circ i)^*((f \circ i)^{-1} \mathcal{I}) = 0 \quad (1)$$

puisque $(f \circ i)^*((f \circ i)^{-1} \mathcal{I}) = i^* \circ (i^{-1} f^*) (i^{-1} (f^{-1} \mathcal{I}))$
 $= i^* (i^{-1} (f^* f^{-1} (\mathcal{I}))) = 0$ car $i^*(i^{-1}(\))$ est le passage au quotient. (*)

(1) permet d'appliquer le sous-lemme α): $f \circ i$ se factorise de manière unique à travers Y . Notons h cette factorisation.
 Il faut maintenant vérifier que $Z' = Z \times_X Y$ en retournant au problème universel:

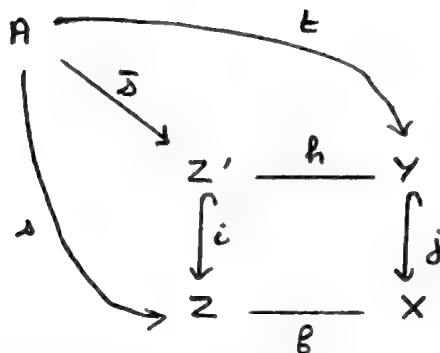
(*) Notons que $(i^{-1} f^*) (i^{-1} (f^{-1} \mathcal{I})) = i^{-1} (f^* f^{-1} \mathcal{I})$, ce qui peut se voir de la manière suivante:

$$f^{-1}\mathcal{O}_X \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_Z$$

donc

$f^{-1}\mathcal{I} \xrightarrow{f^*} f^* f^{-1}\mathcal{I} \rightarrow 0$ est une suite exacte de morphismes de faisceaux d'anneaux. Le foncteur exact i^{-1} donne:

$$i^{-1} f^{-1}\mathcal{I} \xrightarrow{i^{-1} f^*} i^{-1} (f^* f^{-1} \mathcal{I}) \rightarrow 0 \text{ d'où l'égalité cherchée.}$$



$$j \circ t = \beta \circ s$$

$$\begin{aligned} \text{On a } (j \circ t)^* ((j \circ t)^{-1})^* &= t^* (t^{-1} j^*) (t^{-1} j^{-1})^* \\ &= t^* t^{-1} (j^* j^{-1})^* = 0 \quad \text{car } j^* j^{-1} = 0 \quad (\text{passage au quotient}) \end{aligned}$$

Donc $(\beta \circ s)^* ((\beta \circ s)^{-1})^* = 0 \Rightarrow s^* (s^{-1} \beta^*) (s^{-1} \beta^{-1})^* = 0$
 $\Rightarrow s^* \cdot s^{-1} (\beta^* (\beta^{-1})^*) = 0$ de sorte que
 l'on puisse factoriser s de façon unique à travers le sous-espace fermé Z' .
 (cf sous-lemme α). On obtient le morphisme \bar{s} .

Il reste à vérifier que $h \circ \bar{s} = t$: On a :

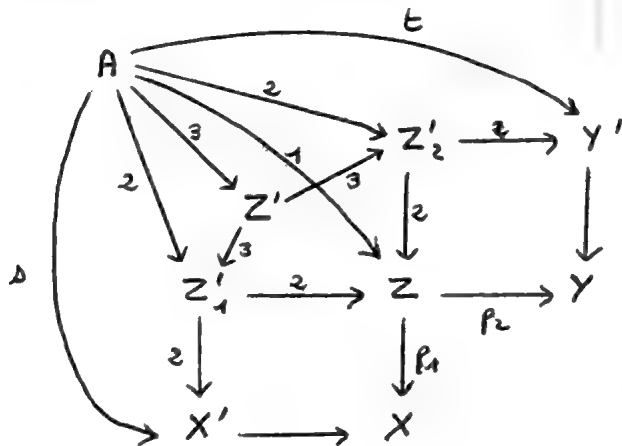
$$j \circ h \circ \bar{s} = \beta \circ i \circ \bar{s} = \beta \circ s = j \circ t \Rightarrow j \circ h \circ \bar{s} = j \circ t$$

et l'on ne peut factoriser $j \circ t$ à travers le sous-espace fermé Y que d'une façon unique (cf sous-lemme α), donc $h \circ \bar{s} = t$.

CPFD

NB : On peut récrire ces sous-lemmes pour un ouvert à la place de Y .

preuve du lemme 3.1.2 :



étapes :

- 1 : Z est le produit $X \times Y$ (P.U.P)
- 2 : X' fermé de X et lemme β), d'où
 $Z'_1 = X' \times_X Z$ existe.
 De même pour Y' .
- 3 : $Z' = Z'_1 \times_Z Z'_2$ existe car
 Z'_1 est fermé dans Z et lemme β .

On vérifie que $Z' = X' \times Y'$.

Lemme 3.1.3 :

$X, Y =$ espaces analytiques

$\{X_i\}_{i \in I} =$ recouvrement ouvert de X

$\{Y_j\}_{j \in J} =$ " " " " Y

Si $X_i \times Y_j$ existent pour tout $(i, j) \in I \times J$, alors le produit $X \times Y$ existe (ie les $X_i \times Y_j$ se recollent pour donner un espace analytique global)

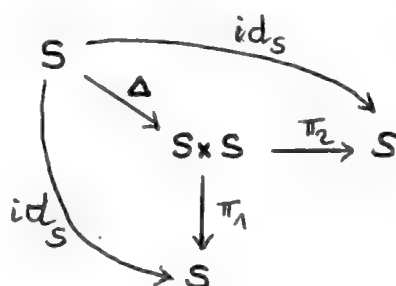
NB : localement, si X est défini par (n, U, f_1, \dots, f_p)

Y " " " (m, V, g_1, \dots, g_s)

on a : $X \times Y = (n+m, U \times V, f_1(x), \dots, f_p(x), g_1(y), \dots, g_s(y))$

On peut montrer que le produit existe localement avec cette définition, et recoller le tout, mais on utilise alors des propriétés fines des esp. analytiques. Les sous-lemmes $\alpha)$ et $\beta)$ n'utilisaient que des espaces annelés.

3.2 Définition : Soit S un espace analytique. Le morphisme diagonale $\Delta: S \rightarrow S \times S$ est le morphisme d'espaces annelés obtenu grâce à la PUP dans le diagramme :



3.3 Proposition : Soit \mathcal{G} une catégorie où le produit existe (donc la diagonale Δ). Le problème du produit fibré :

$$X \xrightarrow{\beta} S \quad \text{①}$$

$\downarrow g$

est analogue au problème du produit fibré :

$$X \times Y \xrightarrow{\quad} S \times S \quad \text{②}$$

$\downarrow \Delta$

preuve :

A une situation $\textcircled{1}$ nous allons faire correspondre une situation

du type :

$$\textcircled{2}$$

L'utilisation, 3 fois de suite pour Δ et t , $\beta\pi_1$ et $g\pi_2$, id_S , de la PUP donne le diagramme :

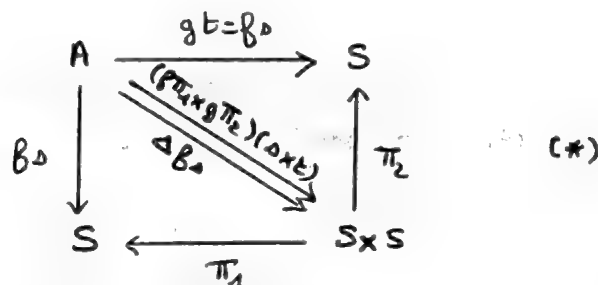
$$\textcircled{3}$$

d'où la situation :

$$\textcircled{4}$$

On montre que :
 $\Delta \beta \Delta = (\beta \pi_1 \times g \pi_2) (\Delta \times t)$
 en utilisant la PUP dans la catégorie \mathcal{G}

En effet :



et les 2 morphismes diagonaux font commuter le diagramme. Vraiment :

$$\pi_1(\Delta f_0) = f_0 \quad \text{car } \pi_1 \Delta = \text{id}_S \quad (\text{cf PUP})$$

et

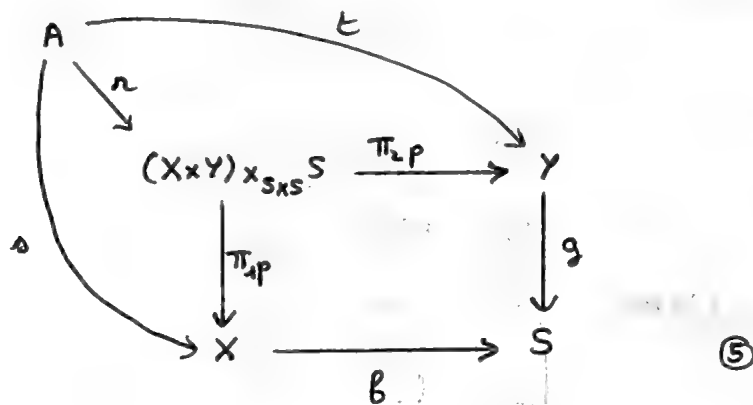
$$\begin{aligned}
 \pi_2(\beta\pi_1 \times g\pi_2)(\Delta \times t) &= g\pi_2(\Delta \times t) \quad \text{car } \pi_2(\beta\pi_1 \times g\pi_2) = g\pi_2 \quad (\text{cf PUP}) \\
 &= g(\pi_2(\Delta \times t)) \\
 &= gt \quad \text{car } \pi_2(\Delta \times t) = t \quad (\text{cf PUP})
 \end{aligned}$$

De même, $\pi_1(\beta\pi_1 \times g\pi_2)(\Delta \times t) = f_0$ et $\pi_2(\Delta f_0) = gt$.

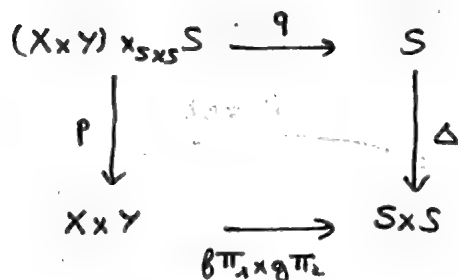
Le diagramme (*) et l'unicité de la solution du PUP pour $S \times S$ et f_0 morphismes $f_0 : A \rightarrow S$ implique que

$$\Delta f_0 = (\beta\pi_1 \times g\pi_2)(\Delta \times t).$$

Cela étant, si le produit fibré $(X \times Y) \times_{S \times S} S$ existe, considérons une situation ④ où $f_0 = gt$ et associons lui la situation ⑤ précisée en ④ : on a :



en notant



le produit fibré $(X \times Y) \times_{S \times S} S$.

⑥

Vérifions que ⑤ définit bien le produit fibré $X \times_S Y$, à savoir :

$$X \times_S Y \doteq (X \times Y) \times_{S \times S} S$$

1° Le carré de ⑤ est commutatif, ie $\beta\pi_1 p = g\pi_2 p$:

On a $\Delta q = (\beta\pi_1 \times g\pi_2) p \Rightarrow \pi_1 \Delta q = \pi_1 (\beta\pi_1 \times g\pi_2) p$
 or $\pi_1 \Delta = \text{id}_S$ et $\pi_1 (\beta\pi_1 \times g\pi_2) = \beta\pi_1$ d'après la PUP appliquée 2
 fois dans ③, donc :

$$q = \beta\pi_1 p$$

Il faut montrer que $q = g\pi_2 p$. Ce sera vrai si $g \circ \pi_2 \circ p$ fait commuter
 le diagramme ⑤ à la place de q . On a :

$$\Delta g\pi_2 = (\beta\pi_1 \times g\pi_2) \text{ d'après la PUP dans ③}$$

donc :

$$\Delta g\pi_2 p = (\beta\pi_1 \times g\pi_2) p$$

ce qui prouve 1°.

2° s et t de ⑤ se factorisent à travers $X \times_S Y$:

Il faut voir si :

$$\begin{cases} \pi_2 p r = t \\ \pi_1 p r = s \end{cases}$$

C'est trivial : $\begin{cases} pr = s \times t \Rightarrow \pi_2 pr = \pi_2 (s \times t) = t & (\text{cf PUP dans ③}) \\ pr = s \times t \Rightarrow \pi_1 pr = \pi_1 (s \times t) = s & (\quad " \quad) \end{cases}$

Conclusion : On a montré que si le problème du produit fibré ② était
 résolu, alors le problème du produit fibré ① le serait canoniquement.
 La réciproque, vraie, est laissée en exercice.

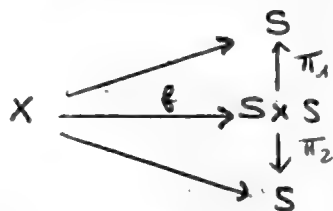
Ce qui prouve la prop. 3.3.

3.4 Lemme : S = espace analytique. Le morphisme diagonal $S \xrightarrow{\Delta} S \times S$
 est une immersion.

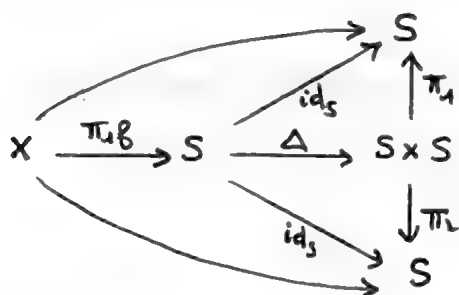
Conséquence : le lemme 3.4 et la prop. 3.3 permettent d'appliquer le
 sous-lemme β) et de conclure à l'existence du produit fibré de 2 espaces
 analytiques quelconques X et Y , ce qui termine la démonstration
 du Théorème 3.1.

preuve du lemme 3.4 :

Faisons une remarque : Si $\pi_1 \beta = \pi_2 \beta$ dans le diagramme :



alors β se factorise de façon unique à travers la diagonale, i.e :

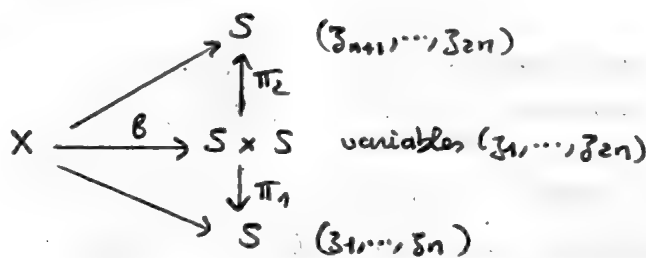


C'est trivial car $\pi_1 \Delta = \pi_2 \Delta = id_S$ par hypothèse. Cette remarque constitue un problème universel

a) Cas où $S = \mathbb{Q}^n$

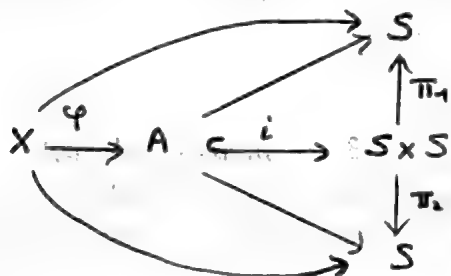
β est alors définie par $\beta^*(z_i) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq n \\ \beta^*(z_i) & n+1 \leq i \leq 2n \end{cases}$

et $\pi_1 \beta = \pi_2 \beta \Leftrightarrow \beta^*(z_i) = \beta^*(z_{i+n})$



Alors β se factorise de façon unique à travers $A \cong \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n / \{(z_i - z_{i+n}) \mid \text{supp } (z_i - z_{i+n}) = \emptyset\}$
d'après le sous-lemme a) et puisque $\beta^*(z_i - z_{i+n}) = 0 \quad \forall i \in [1, n]$.

On a donc :



$i =$ inclusion fermée

Par suite $A \cong S$ d'après puisque solution du même problème universel de la remarque ci-dessus.

b) $S \hookrightarrow S \times S$ est une immersion localement fermée quand S n'est pas une variété : utiliser les Lemmes 3.12 et $\alpha), \beta)$

3.5 Signification du produit fibré en coordonnées locales

$$\begin{array}{ccc} & (m, v, g_1, \dots, g_s) & \\ & \downarrow \psi & \\ (n, u, b_1, \dots, b_p) & \xrightarrow{\varphi} & (l, w, p_1, \dots, p_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \underbrace{(\varphi \times \psi)^*(p(x), p(y), x=y)} & \\ (m+n, u \times v, b(x), g(y), p(x), p(y), \varphi(x)=\varphi(y)) & \rightarrow & (W \times W, p_1(x), \dots, p_n(x), p_1(y), \dots, p_n(y), x=y) \end{array}$$

ie $j_i = j_{i+n}$

$$\downarrow$$

$$(m+n, u \times v, b_1, \dots, b_p, g_1, \dots, g_s) \xrightarrow{\varphi \times \psi} (l+p, w \times w, p_1(x), \dots, p_n(x))$$

diagonale $S \simeq A \hookrightarrow S \times S$
On identifie S à $A : S$ est donc un sous-esp. anal.
fermé de $S \times S$.

d'où :

$$\begin{array}{ccc} (m+n, u \times v, b(x), g(y), p(x), p(y), \varphi(x)=\varphi(y)) & \longrightarrow & (m, v, g(y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (m, u, b(x)) & \xrightarrow{\varphi} & (w, p) \end{array}$$

4. Germe de sous-espaces analytiques pointés :

(X, a) = espace analytique pointé

$E(a) = \{ (U, Y) \mid U \text{ voisinage ouvert de } a \text{ dans } X \text{ et } Y \text{ sous-espace analytique fermé de } U \}$

On définit la relation d'équivalence \sim dans $E(a)$ par :

$$(U, Y) \sim (V, Z) \Leftrightarrow \exists W \text{ voisinage ouvert de } a, W \subset U \cap V \text{ et } Y|_W = Z|_W$$

$E(a)_{\sim}$ est l'ensemble des germes de sous-espaces analytiques de X en a .

On note γ_a le germe de sous-espace analytique induit par Y en a et $\{\gamma_a\}$ le germe d'espaces analytiques sous-jacent.

L'application :

$$\begin{array}{ccc} E(a) & \longrightarrow & \text{\mathbb{C}-algèbres quotients de } \mathcal{O}_{X,a} \\ (U, Y) & \longmapsto & \mathcal{O}_{Y,a} \\ \downarrow & \nearrow \text{\textit{F} bijective} & \\ \gamma_a & & \end{array}$$

passer au quotient et définir une bijection \mathcal{F} entre l'ensemble des germes d'espaces analytiques en a et les \mathbb{C} -algèbres quotients de $\mathcal{O}_{X,a}$: En effet :

1) \mathcal{F} est surjective :

Si $\mathcal{O}_{X,a}/\mathcal{I}_a$ est une \mathbb{C} -algèbre quotient de $\mathcal{O}_{X,a}$, comme $\mathcal{O}_{X,a}$ est noethérien, donc $\mathcal{I}_a = (\beta_1, \dots, \beta_p)_a$.

$\exists (\beta_1, \dots, \beta_p), \beta_i \in \mathcal{O}_X(U), U$ ouvert contenant a , tel que

germe de (β_i) en $a = \beta_{i,a}$

On prend $\mathcal{I} = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ pour définir Y sur U .

2) \mathcal{F} est injective : Soient (U, Y) et $(U, Z) \in E(a)$.

$$\mathcal{O}_{Y,a} = \mathcal{O}_{Z,a} \Leftrightarrow \mathcal{O}_{X,a}/\mathcal{I}_a = \mathcal{O}_{X,a}/\mathcal{L}_a \quad (1)$$

où :

\mathcal{I} = faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_X|_U$ définissant Y ,

\mathcal{L} = " " " " " Z .

(1) $\Leftrightarrow \mathcal{I}_a = \mathcal{L}_a$, puisque (1) est une égalité et non un isomorphisme.

preuve:

$$X_a \leftarrow X$$

$$(X_a)_{\text{red}} \leftarrow (U, Y) \text{ où } Y \text{ fermé de } X \text{ défini par } g_1, \dots, g_p,$$

où $N = (g_{1,a}, \dots, g_{p,a})$ et $g_i \in \mathcal{O}_X(U)$ ($1 \leq i \leq p$).

N est le nilradical de $\mathcal{O}_{X,a}$, donc pour tout i il existe k_i tel que

$g_{i,a}^{k_i} = 0$. En réduisant l'ouvert U , si nécessaire, on aura

$$g_i \in \mathcal{O}_X(\bar{U}) \text{ et } g_i^{k_i} = 0$$

$$\text{Et } (X_a)_{\text{red}} \leftarrow (\bar{U}, Y)$$

Quel est l'espace topologique sous-jacent à (\bar{U}, Y) ? C'est (*)

$$Y = \{x \in \bar{U} / g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$$

$$\stackrel{(+)}{=} \{x \in \bar{U} / g_1^{k_1}(x) = \dots = g_p^{k_p}(x) = 0\} = \bar{U} \text{ d'après}$$

la définition (le choix de) \bar{U} . L'égalité (+) provient de :

$$g_i^{k_i} = 0 \Rightarrow g_i(x) = \varepsilon_x(g_i) \text{ où } \varepsilon_x: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x} \simeq \mathbb{C} \text{ corps, vérifie:}$$

$$\varepsilon_x(g_i^{k_i}) = 0 \Rightarrow \varepsilon_x(g_i) = 0 \Leftrightarrow g_i(x) = 0$$

On a bien $Y = \bar{U}$.

□

(*) Remarque : Si $U \subset X$, $g_1, \dots, g_p \in \mathcal{O}_X$ définissent Y , alors le sous-espace topologique de U sous-jacent à Y est

$$Y = \{x \in U / g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$$

4.3 Proposition:

(X, a) espace analytique pointé

I, J idéaux de $\mathcal{O}_{X,a}$, épaissis sur un voisinage U de a .

Y_a = germe d'espace analytique défini par I

Z_a = " " " " " J

$Y_a \cup Z_a \doteq$ " " " " " $I \cap J$

Alors :

$$\{Y_a \cup Z_a\} = \{Y_a\} \cup \{Z_a\}$$

preuve :

Morphismes plats

annelés

Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Le foncteur f^* de la catégorie des \mathcal{O}_Y -modules dans celle des \mathcal{O}_X -modules est défini par :

$$f^*F = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}F$$

pour tout \mathcal{O}_Y -module F de base Y .

f^* est un foncteur exact à droite.

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

annelés

(1) Définition : On dit que $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme plat entre espaces analytiques si le foncteur f^* est exact.

Fibre à fibre, cela signifie que :

(2) $\forall x \in X$ le foncteur $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} ()$ est exact à gauche

En effet : $(f^*F)_x = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} F_y$ et F_y est un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ -module qui peut être choisi arbitrairement. (Soit $y = f(x)$)

Enfin, (2) équivaut à l'énoncé :

(3) $\forall x \in X$ $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ -module plat.

Chapitre 6.

Morphismes finis

1. Le théorème des morphismes finis

1.1 Théorème :

Soient $\varphi: X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques,
 $x \in X$ et $s = \varphi(x)$ fixés,
 F un \mathcal{O}_x -module
 Z le support de F

On suppose que 1) F est de présentation finie (*)

2) $F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Alors il existe un voisinage X' de x et un voisinage S' de s tels que :

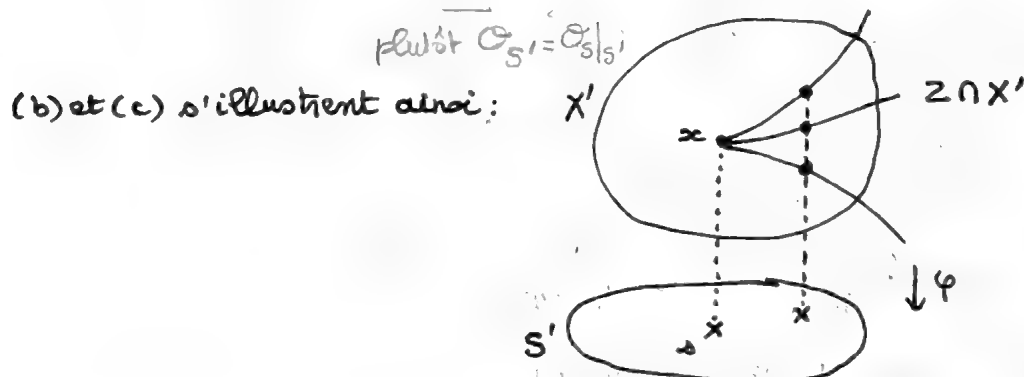
(a) $\varphi(X') \subset S'$, On notera $\varphi' = \varphi|_{X'}: X' \rightarrow S'$,

(b) $\varphi': X' \cap Z \rightarrow S'$ est un morphisme propre à fibres finies

(c) $X' \cap Z \cap \varphi'^{-1}(s) = \{x\}$

(d) $(\varphi'_* F)_t = \bigoplus_{y \in \varphi'^{-1}(t) \cap Z} F_y$

(e) $\varphi'_* F$ est un $\mathcal{O}_{S'}$ -module de présentation finie sur S' . (**)



Le théorème est un théorème d'image directe modulo la condition 2), qui assure que si F est de présentation finie, alors $\varphi'_* F$ aussi.

(*) On écrira systématiquement "présentation finie" pour "localement de présentation finie" sans plus le rappeler.

(**) Voir aussi le Co. 1.4 p 72, (1) et (3).

1.2 Définition : Soient X un espace analytique et F un \mathcal{O}_X -module. On dit que F est quasi-fini en $x \in X$ pour le morphisme $\varphi: X \rightarrow S$ si :

$$\dim_{\mathbb{C}} (F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathbb{C}) < \infty$$

Remarque 1.2.1 :

Signification de l'hypothèse 2) du Théorème 1.1

a)* x est isolé dans le support de F (signification topologique, cf c)

$$b)* F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathbb{C} = F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathcal{O}_{S,0} / \mathfrak{m}_0$$

ie $\mathbb{C} \simeq \mathcal{O}_{S,0} / \mathfrak{m}_0$ est un $\mathcal{O}_{S,0}$ -module.

D'ailleurs, F_x est un $\mathcal{O}_{S,0}$ -module puisque c'est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module et puisque $\varphi^*: \varphi^* \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_X$ induit le morphisme germinique :

$$\varphi_x^*: (\varphi^* \mathcal{O}_S)_x = \mathcal{O}_{S,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

$F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathbb{C}$ a bien un sens.

$\{s\}$ est un sous-espace analytique fermé de S défini par le faisceau d'idéaux \mathcal{M} suivant :

$$\begin{cases} \mathfrak{m}_s = \text{idéal maximal de } \mathcal{O}_{S,s} \\ \mathfrak{m}_{s'} = \mathcal{O}_{S,s'} \text{ si } s' \neq s \end{cases}$$

puisque alors :

$$\text{Supp } \mathcal{O}_S / \mathcal{M} = \{x \in S / (\mathcal{O}_S / \mathcal{M})_x = \mathcal{O}_{S,0} / \mathfrak{m}_0 \neq 0\} = \{s\}.$$

On remarquera que $\{s\}$ étant localement fermé dans S , le faisceau $\mathcal{O}_S / \mathcal{M}$ représente le prolongé par 0 du faisceau $\mathcal{O}_{S,0} / \mathfrak{m}_0$ sur $\{s\}$ (cf Th. 7.2 p 29 verso)

Soit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(\Delta) & & \{\Delta\} \\ \downarrow j & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

Le sous-lemme β) p 58 vers montre que le produit fibré $X \times_S \{\Delta\}$ est un sous-espace analytique fermé de X associé à l'idéal $\varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m})$. Comme Top commute avec le produit fibré, on a : $\text{Supp } \frac{\mathcal{O}_X}{\varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m})} = \varphi^{-1}(\Delta)$, de sorte que $\left(\varphi^{-1}(\Delta), \frac{\mathcal{O}_X}{\varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m})} \Big|_{\varphi^{-1}(\Delta)} \right)$ soit un sous-espace analytique fermé de X .

Par définition de j^*F (cf chap. 3 §10 p 37) :

$$j^*F \doteq \frac{\mathcal{O}_X}{\varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m})} \Big|_{\varphi^{-1}(\Delta)} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}F$$

$$j^{-1} = () \Big|_{\varphi^{-1}(\Delta)} \text{ donc}$$

$$j^*F = j^{-1} \left(\frac{\mathcal{O}_X}{\varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m})} \otimes_{\mathcal{O}_X} F \right) \quad ((*) \text{ ci-dessus})$$

$$j^*F = j^{-1} \left(\frac{F}{(\varphi^*\varphi^{-1}\mathfrak{m}) \cdot F} \right) \quad ((**) \text{ ci-dessus})$$

$$j^*F = \frac{F}{(\varphi^*\varphi^{-1}\mathfrak{m}) \cdot F} \Big|_{\varphi^{-1}(\Delta)}$$

D'autre part :

$$F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,\Delta}} \mathbb{C} = F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,\Delta}} \frac{\mathcal{O}_{S,\Delta}}{\mathfrak{m}_\Delta} = \frac{F_x}{\mathfrak{m}_\Delta \cdot F_x} \quad ((**))$$

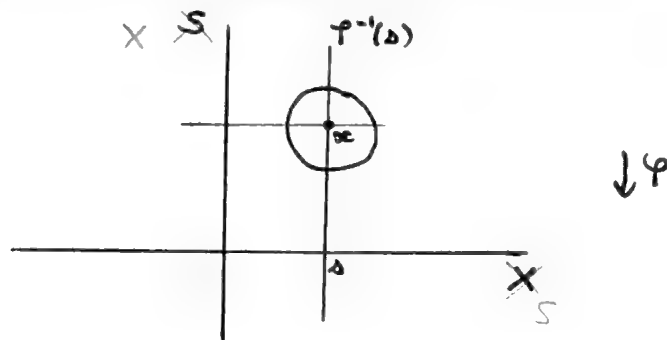
n'est autre que la fibre de j^*F au dessus de x , car

$$(j^*F)_x = \left(\frac{F}{(\varphi^*\varphi^{-1}\mathfrak{m}) \cdot F} \Big|_{\varphi^{-1}(\Delta)} \right)_x = \frac{F_x}{((\varphi^*\varphi^{-1}\mathfrak{m}) \cdot F)_x} = \frac{F_x}{\mathfrak{m}_\Delta \cdot F_x}$$

Ainsi

$$F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,\Delta}} \mathbb{C} \simeq (j^*F)_x$$

L'hypothèse 2) (ie la propriété d'être quasi-fini) donne donc des renseignements sur la fibre de j^*F en x :



(*) Si A et B sont des \mathcal{O}_X -modules et si $j: Y \rightarrow X$, on a $j^{-1}A \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}B = j^{-1}(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B)$.
Il suffit de définir les morphismes :

$$\begin{array}{ccc} j^{-1}A \times j^{-1}B & \longrightarrow & j^{-1}(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B) \\ (s, s') & \longmapsto & s \otimes s' \end{array}$$

$$\downarrow \quad \nearrow \psi$$

$$j^{-1}A \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}B$$

$A \otimes_{\mathcal{O}_X} B$ est le faisceau associé au préfaisceau $A(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} B(U)$. On a $(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B)_x = A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} B_x$ et $\bigcup_{x \in X} A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} B_x$ est l'espace étalé associé à ce préfaisceau. On vérifie que $s \otimes s'$ définit bien une section de $j^{-1}(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B)$ lorsque s et s' sont des sections de $j^{-1}A$ et $j^{-1}B$ respectivement.

$$\begin{array}{ccc} & s & \nearrow \\ Y & \xrightarrow{j} & X \\ & s' & \searrow \\ & & B \end{array}$$

On a un isomorphisme ψ car, fibre à fibre et en posant $j(y) = x$, on a :

$$\begin{cases} (j^{-1}A \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}B)_y = (j^{-1}A)_y \otimes_{(j^{-1}\mathcal{O}_X)_y} (j^{-1}B)_y = A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} B_x \\ (j^{-1}(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B))_y = (A \otimes_{\mathcal{O}_X} B)_x = A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} B_x \end{cases}$$

(**) Si B est un A -module et si \mathcal{M} est un idéal de A , on a

$$A/\mathcal{M} \otimes_A B = B/\mathcal{M}.B$$

preuve : $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow A \rightarrow A/\mathcal{M} \rightarrow 0$ donne, puisque \otimes_A est exact à droite : $\mathcal{M} \otimes_A B \xrightarrow{\psi} A \otimes_A B \rightarrow A/\mathcal{M} \otimes_A B \rightarrow 0$, donc

$$A/\mathcal{M} \otimes_A B = \text{Coker } \psi = \frac{A \otimes_A B}{\text{Im } \psi} = \frac{B}{\mathcal{M}.B} \text{ après l'identification habituelle :}$$

$$\text{on a } A \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B.$$

$$a \otimes b \mapsto a.b$$

preuve du Théorème 1.1 :

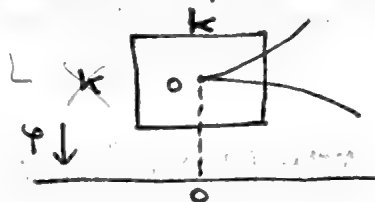
$$\begin{array}{ccc} \text{1°/ Cas où } X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi} & S = \mathbb{C}^n \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \\ x = (0, \dots, 0) & & s = (0, \dots, 0) \end{array}$$

d'hypothèse 2) s'écrit : $\dim \left(F_0 \otimes_{\mathcal{O}_{x_1, \dots, x_n}} \mathcal{O}_{x_1, \dots, x_n} / (x_1, \dots, x_n) \right) < \infty$

ie $\dim \left(F_0 / (x_1, \dots, x_n) F_0 \right) < \infty$.

D'après le chapitre sur le Th. de Weierstrass, $\exists h \in \mathcal{O}_{x_1, \dots, x_{n+1}}$ $h(0, x_{n+1}) \neq 0$ et $hF_0 = 0$. (cf lemme 2.6.2 p 44 du chap 4)

F est un \mathcal{O}_{n+1} -module de type fini, donc il existe un voisinage compact $K \times L$ de 0 dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ tel que $hF = 0$ sur $K \times L$ et h possède les propriétés de Weierstrass sur $K \times L$ (ie h ne s'annule pas sur $K \times \partial L$ et ne s'annule sur $0 \times \partial L$ que sur l'origine : restreindre L au besoin) (*)



(NB: $h(0,0) = 0$, sinon trivial !)

Prendons $S' = K$
 $X' = K \times L$
 $Y = h^{-1}(0)$

On a $\varphi(X') \subset S'$ et $\varphi|_Y$ est finie au dessus de S' puisque

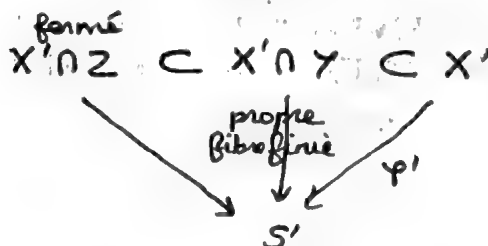
$(\varphi|_Y)^{-1}(x_{n+1}) = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in X' / h(x) = 0 \}$ est fini d'après le théorème de Weierstrass (chap 4, Th 2.1, (1))

Alors :

$\varphi|_{X' \cap Y} : X' \cap Y \longrightarrow S'$ est propre (cf. situation de Weierstrass) à fibres finies, et $X' \cap Y \cap \varphi^{-1}(0) = \{0\}$.

Comme $hF = 0$ dans X' , $X' \cap Z \subset Y \cap X'$ et $X' \cap Z$ est fermé dans $Y \cap X'$, donc à fortiori

$\varphi : X' \cap Z \longrightarrow S'$ est propre à fibre finie, et vérifie $X' \cap Z \cap \varphi^{-1}(0) = \{0\}$.



ce qui prouve a), b) et c).

(*) cf chap 4, preuve de la prop 2.3.

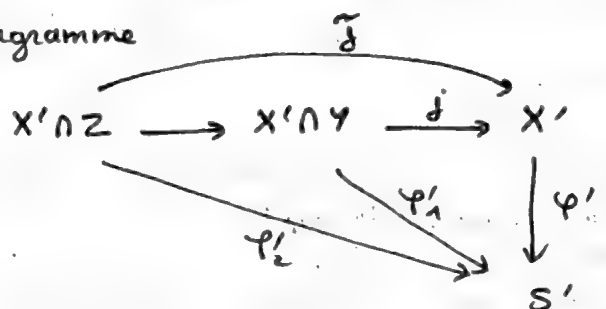
preuve de (d)

Pour $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X'/h}$, \mathcal{O}_Y est un faisceau sur X' .

Soient

$$j: X' \cap Y \hookrightarrow X' \quad \text{et} \quad \tilde{j}: X' \cap Z \hookrightarrow X'$$

dans le diagramme



(φ'_1, φ'_2 propres à fibres finies, on les notera encore φ')

Pour tout $t \in S'$, on a :

$$(1) \quad \begin{cases} (\varphi'_* \mathcal{O}_Y)_t \stackrel{(**)}{=} (\varphi'_* j_* j^{-1} \mathcal{O}_Y)_t \stackrel{(*)}{=} j^{-1} \mathcal{O}_Y(\{t\} \times \tilde{L} \cap Y) = \bigoplus_{y \in \varphi'^{-1}(t) \cap Y} \mathcal{O}_{Y,y} \\ (\varphi'_* F)_t \stackrel{(**)}{=} (\varphi'_* \tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} F)_t \stackrel{(*)}{=} \tilde{j}^{-1} F(\{t\} \times \tilde{L} \cap Z) = \bigoplus_{y \in \varphi'^{-1}(t) \cap Z} F_y \end{cases}$$

les dernières égalités provenant du fait que $\{t\} \times \tilde{L} \cap Y$ et $\{t\} \times \tilde{L} \cap Z$ sont de cardinal fini.

ce qui prouve (d).

(*) Si $\varphi: X \rightarrow Y$ application fermée, X paracompact, pour tout faisceau F sur X et $\forall t \in Y$, on a

$$(\varphi_* F)_t = F(\varphi^{-1}(t))$$

preuve: cf 8.1.1 chap 3

(**) Prop: Si $j: X \hookrightarrow Y$ est une inclusion fermée (ie $X \subset Y$) et F un faisceau sur X , alors le foncteur $j_*(.)$ représente le foncteur "prolongement par 0" de F .

En effet, le foncteur "prol. par 0" existe (cf chap 3, 7.2) et

$$\begin{cases} \forall t \in X & (j_* F)_t \stackrel{(*)}{=} F(j^{-1}(t)) = F(t) \\ \forall t \in Y \setminus X & (j_* F)_t = 0 \quad (\text{car } \exists U \text{ vois de } t / (j_* F)(U) = F(\emptyset) = 0) \end{cases}$$

Corollaire: Si $j: X \hookrightarrow Y$ est une inclusion fermée et F un faisceau sur Y dont le support est inclus dans X , alors $j_* j^{-1} F = F$. (preuve: $j^{-1} F$ est un faisceau sur X et $j_* j^{-1} F$ est le faisceau prolongé par 0 de $j^{-1} F$ sur tout Y , tout comme F . D'après l'unicité du prolongement par 0, on a bien $j_* j^{-1} F = F$.)

NB: On a aussi $j^{-1} j_* F = F$ (cf p 81 preuve 2.2)

(e) $\varphi'_* F$ de présentation finie sur S ?

$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X'/h}$. Par hypothèse, F est de présentation finie donc

$$\mathcal{O}|_{X'}^p \longrightarrow \mathcal{O}|_{X'}^q \longrightarrow F|_{X'} \longrightarrow 0$$

En appliquant le foncteur exact à droite $\otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_Y$:

$$\mathcal{O}_Y^p \longrightarrow \mathcal{O}_Y^q \longrightarrow F|_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'/h} \longrightarrow 0$$

Mais $F|_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'/h} \stackrel{(2)}{=} \frac{F}{hF}|_{X'} = F|_{X'}$ car $hF|_{X'} = 0$ par construction de h .

(2) provient du foncteur exact à droite $\otimes_{\mathcal{O}}$ car $0 \rightarrow h\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/h \rightarrow 0$ implique $F \otimes_{\mathcal{O}} h\mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} F \rightarrow F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/h \rightarrow 0$ donc $F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/h = \text{Coker } \varphi = F/\Delta \text{m } \varphi$ et $\Delta \text{m } \varphi \simeq hF$ dans l'identification $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} F \simeq F$.)

Finalement, la suite:

$$\mathcal{O}_Y^p \longrightarrow \mathcal{O}_Y^q \longrightarrow F|_{X'} \longrightarrow 0$$

est exacte. Le foncteur φ'_* n'est pas exact à droite en général (*) mais les égalités (1) montrent que

$$\varphi'_* \mathcal{O}_Y^p \longrightarrow \varphi'_* \mathcal{O}_Y^q \longrightarrow \varphi'_* F|_{X'} \longrightarrow 0 \text{ est encore exact}$$

(c'est une collection de suites puisque $(\varphi'_* \mathcal{O}_Y)_t = \bigoplus_{y \in \varphi^{-1}(t) \cap Y} \mathcal{O}_{Y,y}$ est une somme directe, idem pour $(\varphi'_* F)_t$.)

On regarde l'exactitude fibre à fibre !)

Le lemme suivant permet de conclure car si $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow 0$, ie si F est le conoyau d'un morphisme entre deux \mathcal{O}_S -modules de présentation finies, F est lui-même un \mathcal{O}_S -module de présentation finie.

(*) $f: X \rightarrow Y$ morphisme propre à fibres finies $\Rightarrow f_*$ est exact.

Mais pour appliquer ce résultat ici il faut se restreindre à $X' \cap Z$ pour parler de $\varphi': X' \cap Z \rightarrow S'$.

Lemme 1.1.1 : $\varphi'_* \mathcal{O}_Y$ est un \mathcal{O}_S -module libre de type fini

preuve: Soit d le nombre de zéros de $x_{n+1} \mapsto h(0, \dots, 0, x_{n+1})$. On montre que

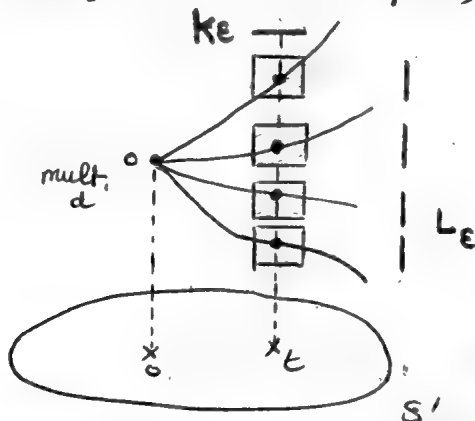
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n|_S^d & \xrightarrow{\quad} & \varphi'_* \mathcal{O}_Y \\ (b_1, \dots, b_d) & \longmapsto & \sum_{j=1}^d (b_j \circ \varphi') x_{n+1}^{d-j} \end{array} \quad (2)$$

est un isomorphisme de faisceaux.

Ici, x_{n+1}^{d-j} désigne une section globale de \mathcal{O}_Y , donc définit bien une section de $\mathcal{O}_Y(\varphi'^{-1}(U))$, et $b_j \circ \varphi' \in \mathcal{O}_Y(\varphi'^{-1}(U))$ où $U \in \mathcal{S}$.

On vérifie l'isomorphisme (2) fibre à fibre :

Si $t \in S'$, notons $\{(t, y_1), \dots, (t, y_p)\}$ la fibre de φ au dessus de t . On a $l \leq d$ (possibilités de racines multiples) et le dessin :



On peut trouver des voisinages K_E compact connexe et L_E compact (non nécessairement connexe), de sorte que $K_E \times L_E$ soit un voisinage compact de l'ensemble $\{(t, y_1), \dots, (t, y_p)\}$ et que le théorème de préparation de Weierstrass s'applique sur $K_E \times L_E$. (cf chap 4: Th 2.1 et construction de la preuve de la prop. 2.3)

On aura donc l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} B(K_E)^d & \xrightarrow{\quad \simeq \quad} & \frac{B(K_E \times L_E)}{h B(K_E \times L_E)} \\ (b_1, \dots, b_d) & \longmapsto & b_d + \dots + b_1 x_{n+1}^{d-1} \end{array}$$

On passe à la limite inductive pour $E \rightarrow 0$ pour obtenir :

$$\mathcal{O}_{S,E}^d \xrightarrow{\quad \simeq \quad} \left(\bigoplus_{i=1}^p \mathcal{O}_{x_i(t, y_i)} \right) / h$$

d'où (2).

$$\begin{array}{ccc} 2^\circ / \text{Cas où} & X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p & \longrightarrow \mathbb{C}^n = S \\ & x = (0, 0) & \longmapsto s = 0 \end{array}$$

récurrence sur p: c'est vrai au rang 1 d'après le 1°. Soit :

$$X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{C}^{n+p-1} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{C}^n = S$$

Par fonctorialité de l'image directe, on a $(\pi_2 \pi_1)_* = \pi_{2*} \pi_{1*}$.
On a :

F quasi-fini sur \mathbb{C}^n pour $\pi_2 \pi_1 \Rightarrow F$ quasi-fini sur \mathbb{C}^{n+p-1} pour π_1
En effet, il faut vérifier que

$$\dim_{\mathbb{C}} (F_0 \otimes_{\mathcal{O}_n} \mathcal{O}_n / \mathfrak{m}_n) < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} (F_0 \otimes_{\mathcal{O}_{n+p-1}} \mathcal{O}_{n+p-1} / \mathfrak{m}_{n+p-1}) < \infty$$

ce qui provient de l'écriture $F_0 \otimes_{\mathcal{O}_n} \mathcal{O}_n / \mathfrak{m}_n = F_0 / \mathfrak{m}_n F_0$ et de l'existence de la surjection évidente :

$$F_0 / \mathfrak{m}_n F_0 \longrightarrow F_0 / \mathfrak{m}_{n+p-1} F_0 \longrightarrow 0$$

(puisque $\mathfrak{m}_n = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathfrak{m}_n F_0$ (resp. $\mathfrak{m}_{n+p-1} F_0$) désigne l'idéal engendré par les $x_i \cdot f$, $1 \leq i \leq n$ (resp. $1 \leq i \leq n+p-1$) et $f \in F$ }, donc $\mathfrak{m}_n \subset \mathfrak{m}_{n+p-1}$). On peut donc appliquer le cas 1° :

D'après le 1°, on a $\pi'_1: X' \longrightarrow S'$, $X' \in \mathbb{C}^{n+p}$, $S' \in \mathbb{C}^{n+p-1}$, vérifiant les conditions (a) à (e) du Th. 1.1.

Remarquons que $\pi'_1{}_* F$ est un $\mathcal{O}_{S'}$ -module de présentation finie (cf 1° (c)). Il est quasi-fini sur \mathbb{C}^n puisque

- 1) $(\pi'_1{}_* F)_0 = F_{00}$ (cf 1° (c) et (d))
- et 2) $(\pi'_1{}_* F)_0 \otimes_{\mathcal{O}_n} \mathcal{O}_n / \mathfrak{m}_n = (\pi'_1{}_* F)_0 / \mathfrak{m}_n = F_{00} / \mathfrak{m}_n F_{00}$ de dimension finie par hypothèse.

Ainsi $\pi'_1{}_* F$ vérifie les hypothèses du théorème. L'hypothèse de récurrence au rang précédent montre que :

$$\pi_2'': S'' \longrightarrow T''$$

vérifie les conditions (a) à (e) du Th. 1.1.

D'où une application

$$\varphi' = X'' \xrightarrow{\pi_1''} S'' \xrightarrow{\pi_2''} T''$$

$$\text{où } X'' = X' \cap (\pi_1'^{-1}(S'')) \text{ et } \pi_1'' = \pi_1'|_{X''}$$

Avant de vérifier que cette application convient, remarquons :

Lemme 1.1.2: (b) \Rightarrow (d) est toujours vraie, ie si $\varphi': X' \cap Z \rightarrow S'$ est un morphisme propre à fibres finies où $Z = \text{Supp } F$, alors

$$(\varphi'_* F)_E = \bigoplus_{y \in \varphi'^{-1}(E) \cap Z} F_y \quad \forall E \in S'$$

preuve du lemme 1.1.2 : On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' \cap Z & \xhookrightarrow{\gamma} & X' \\ & \searrow & \downarrow \varphi' \\ & & S' \end{array} \quad \text{où } Z = \text{Supp } F$$

$$\begin{aligned} \varphi'_* F &= \varphi'_* \gamma_* \gamma^{-1} F \quad \text{car } \gamma_* \gamma^{-1} F = F \text{ puisque } \gamma \text{ est une inclusion} \\ &= (\varphi' \circ \gamma)_* \gamma^{-1} F \quad \text{car } \gamma \text{ est fermée (cf (**) p 67 verso)} \end{aligned}$$

D'après (*) p 67 verso, comme $\varphi' \circ \gamma$ est fermée, on a :

$$(\varphi'_* F)_E = \gamma^{-1} F((\varphi' \circ \gamma)(E))$$

$$\text{et } (\varphi' \circ \gamma)(E) = \{y_1, \dots, y_k\} = \text{pts isolés de } \varphi'^{-1}(E) \text{ dans le support } Z.$$

Donc :

$$(\varphi'_* F)_E = \bigoplus_{i=1}^k F_{y_i}$$

□

Ce lemme 1.1.2 montre, en même temps, que $Z' \doteq \text{Supp } \pi_{1*} F$ est $\pi(Z)$:

$$Z' \doteq \text{Supp } \pi_{1*} F = \pi(Z)$$

En effet,

$$\begin{aligned} Z' &= \{x \in S' / (\pi_1' * F)_x \neq 0\} \quad (\text{sans adhérence car de type fini}) \\ &= \{x \in S' / \exists y \in \varphi^{-1}(x) \quad F_y \neq 0\} = \pi_1'(Z) \quad (\text{compte tenu de 1.1.2. et}) \\ &\text{parce que } \pi_1' : X' \cap Z \rightarrow S' \text{ est propre à fibres finies d'après le 19)} \end{aligned}$$

On a posé $\varphi' = \pi_2'' \pi_1'' : X'' \rightarrow T''$, et on vérifie les propriétés (a), (b), (c), (e) par composition:

• (a) trivial

• (b) et (c) : On a

$$\begin{array}{ccc} X'' \cap Z & \xrightarrow{\pi_1'} & S'' \cap \pi_1'(Z) = S'' \cap Z' \\ \varphi' \downarrow & & \uparrow \pi_2'' \\ T'' & & \end{array}$$

$$\text{où } X'' = \pi_1'^{-1}(S'').$$

φ' est à fibres finies puisque composée de 2 appl. à fibres finies, et vérifie trivialement (c).

$\varphi' : X'' \cap Z \rightarrow T''$ est propre ?

• (e) $\varphi'_* F = \pi_2''_* (\pi_1''_* F)$

et $\pi_2''_* F = (\pi_1''_* F)|_{S''}$ est un $\mathcal{O}_{S''}$ -module de présentation finie, et quasi-fini pour π_2'' , tout comme $\pi_1''_* F$.

Par suite $\pi_2''_* (\pi_1''_* F)$ est un $\mathcal{O}_{T''}$ -module de présentation finie d'après la comb. de $\pi_2'' : S'' \rightarrow T''$.

\square

3°/ Cas où X et S sont des modèles d'espaces analytique

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

On devrait écrire $U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ et $V \subset \mathbb{C}^n$ au lieu de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ et \mathbb{C}^n , mais cela ne prête pas à confusion.

$$F = X\text{-module}, \text{ où } \mathcal{O}_X = \left. \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+p}} / I \right|_{\text{Supp}(F) = X}$$

Soit \tilde{F} le prolongement par 0 du faisceau F sur \mathbb{C}^{n+p} : c'est $j_* F$ lorsque j est l'inclusion fermée, c'est $j_! F$ = image directe à support propre de F dans le cas général, $j_! F$ est défini par :

$$j_! F(U) = \{ \gamma \in F(j^{-1}(U)) / j|_{|\gamma|} : |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ propre} \}$$

où $|\gamma|$ désigne le support de la section $\gamma \in F(j^{-1}(U))$.

(retourner au chapitre 3, § 7, Th 7.2 p 29)

Alors :

a) \tilde{F} est de présentation finie au voisinage de 0 :

Le foncteur "prolongement par 0" est exact (trivial : passer aux fibres!) donc :

$$\mathcal{O}_X^p \rightarrow \mathcal{O}_X^q \rightarrow F \rightarrow 0$$

donne :

$$\tilde{\mathcal{O}}_X^p \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_X^q \rightarrow \tilde{F} \rightarrow 0$$

$$\text{où } \tilde{\mathcal{O}}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p} / I \quad \text{puisque } \mathcal{O}_X = \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p} / I \right) \Big|_{\text{Supp}(F) = X}$$

\tilde{F} apparaît donc comme le conoyau de 2 faisceaux de \mathcal{O}_X -présentation finie, donc \tilde{F} est de \mathcal{O}_X -présentation finie. (*)

(*) Rappel : le quotient, le conoyau de 2 faisceaux de \mathcal{O}_X -modules de présentation finie est encore de présentation finie. On a la même chose en remplaçant "présentation finie" par " \mathcal{O}_X -module cohérent". Une autre façon de montrer que \tilde{F} est de \mathcal{O}_X -présentation finie consisterait à dire que I de type fini et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+p}}$ cohérent $\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+p}}/I$ cohérent, donc le conoyau \tilde{F} est cohérent, donc à fortiori de présentation finie.

β) \tilde{F} est quasi-fini à l'origine

$$\tilde{F}_0 = F_0$$

$F = X$ -module $\Rightarrow F_0 = \mathcal{O}_{n+p}/I$ -module. On considère la dimension de :

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{F_0}{\left(\mathcal{M}_{n+p}/I\right)} < \infty \text{ par hypothèse, donc } \dim_{\mathbb{C}} \frac{F_0}{\mathcal{M}_{n+p} F_0} < \infty.$$

où \mathcal{M}_{n+p}/I = idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,0}$

Soit $A/I = A$ -module noethérien $\Rightarrow A/I$ = anneau noethérien
 I idéal de A

On applique le théorème 1.1 à \tilde{F} (cf 2°) pour obtenir

$$\tilde{X}' \subset \mathbb{C}^{n+p} \xrightarrow{\pi'} \tilde{S}' \subset \mathbb{C}^n$$

vérifiant (a) à (e).

On montre alors que l'application :

$$X' = \tilde{X}' \cap X \xrightarrow{\varphi'} S' = \tilde{S}' \cap S$$

est solution du problème 1.1 dans le cas 3°.

$$Z = \text{Supp } F = \text{Supp } \tilde{F}$$

$$\begin{array}{ccc} X' \cap Z \subset X' = \tilde{X}' \cap X & \hookrightarrow & \tilde{X}' \\ & \searrow & \downarrow \pi' \\ & & \tilde{S}' \\ & \downarrow \varphi' & \\ & S' = \tilde{S}' \cap S & \hookrightarrow \end{array}$$

(a) trivial

$\pi' : \tilde{X}' \cap Z \rightarrow \tilde{S}'$ propre à fibres finies vérifie (c), donc $\varphi' : X' \cap Z \rightarrow S'$ est à fibres finies et vérifie (c).

Vérifions que $\varphi' : X' \cap Z \rightarrow S'$ est propre :

preuve de (2):

Comme $\pi'_* \tilde{F}$ est de présentation finie:

$$\mathcal{O}_n^p \rightarrow \mathcal{O}_n^q \rightarrow \pi'_* \tilde{F} \rightarrow 0$$

Le foncteur $\mathcal{O}_{S'} \otimes_{j'^{-1}\mathcal{O}_n} j'^{-1}(\cdot)$ étant exact à droite, on obtient:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_{S'}^p & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_{S'}^q & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_{S'} \otimes_{j'^{-1}\mathcal{O}_n} j'^{-1} \pi'_* \tilde{F} & \rightarrow & 0 \\ F \xrightarrow{\sim} \tilde{F} & & & & & & \\ \text{ou } X' \xrightarrow{j} \mathbb{A}^{n+p} & \text{commute.} & & & & & \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \pi' & & & & \\ S' \xrightarrow{j} \mathbb{A}^n & & & & & & \end{array}$$

Le diagramme carré donne: $\pi'_* \tilde{F} = j_* \varphi'_* F$ puisque $\tilde{F} = j'_* F$

Donc:

$$\mathcal{O}_{S'} \otimes_{j'^{-1}\mathcal{O}_n} (j'^{-1} j_* \varphi'_* F) \doteq j^* (j_* \varphi'_* F) = \varphi'_* F$$

$$\text{car } j^* j_* = \text{Id}$$

□

$$4^\circ \text{ Cas général: } \begin{cases} X = (p, V, g_1, \dots, g_N) \\ S = (n, U, b_1, \dots, b_p) \end{cases} \quad X \xrightarrow{i} V$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi \times i} & S \times V \\ \varphi \downarrow & \swarrow p_{1*} & \\ S & & \end{array}$$

i^* surjectif $\Rightarrow (\varphi \times i)^*$ surjectif $\Rightarrow \varphi \times i$ est un plongement local (cf critère de plongement, chap 5, §2)

$\Rightarrow X$ isomorphe à un localement

fermé de $S \times V$.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Alors } X \simeq \tilde{X} & \xrightarrow{\quad} & S \times V & \xrightarrow{\quad} & U \times V \\ \varphi \downarrow & & \swarrow p_{1*} & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{\quad} & & & U \end{array}$$

et on est ramené au cas précédent. FIN.

Conséquences du Théorème 1.1 :

1.3 Définitions :

Soient X un espace analytique, $\varphi: X \rightarrow S$ et F un X -module. Notons $Z = \text{Supp } F$ et $\varphi(x) = s$.

- (1) On dit que F est quasi-fini en x si $\dim_{\mathbb{C}} (F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S, \varphi(x)}} \mathbb{C}) < \infty$ (*)
- (2) On dit que F est fini en x si F_x est un $\mathcal{O}_{S, s}$ -module de type fini.
- (3) On dit que φ est quasi-finie (resp. finie) en x si \mathcal{O}_x est quasi-fini (resp. fini) en x au sens (1) (resp. (2)).
- (4) F est localement quasi-fini (resp. localement fini) s'il est quasi-fini (resp. fini) en tout point de X .
- (5) φ est localement quasi-finie (resp. loc. finie) si \mathcal{O}_x l'est au sens (4).
- (6) F est fini (on dit encore : F est fini sur S) si F est localement fini et si l'application $\varphi|_Z$ est propre.

1.4 Corollaire : Soient $\varphi: X \rightarrow S$ et F un X -module de présentation finie (*). On a :

- (1) F fini en $x \Leftrightarrow F$ quasi-fini en x
- (2) $\{x \in X / F \text{ fini en } x\}$ est un ouvert.
- (3) F fini sur S (*) $\Rightarrow \varphi_* F$ est de présentation finie
- (4) F fini sur $S \Rightarrow \varphi(Z)$ est le support de $\varphi_* F$, donc en particulier $\varphi(Z)$ est fermé.

(1) * fini \Rightarrow quasi-fini :

On a l'isomorphisme canonique :

$$F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \mathcal{O}_{S, s} / \mathfrak{m}_s \xrightarrow{\cong} F_x / \mathfrak{m}_s$$

$$f \otimes g \longmapsto \overline{f \cdot g}$$

qui donne la structure de $\mathbb{C} = \mathcal{O}_{S, s} / \mathfrak{m}_s$ -module sur $F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \mathbb{C}$.

(*) On écrit "présentation finie" pour "localement de présentation finie" au sujet d'un \mathcal{O}_X -module. Cet abus sera constant : toutes les propriétés de ce type seront locales.

(*) cf définition 1.3, (6) : on suppose $\varphi|_Z$ propre !

(**) cf remarque 1.2.1 pour la définition de $F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \mathbb{C}$.

Si $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ engendrent F_x comme $\mathcal{O}_{S,0}$ -module, $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ engendrent F_x/\mathcal{M}_0 comme \mathbb{C} -espace vectoriel

On a, en effet: $\beta \otimes g = g(0) \beta \otimes 1$

puisque $\mathcal{O}_{S,0} = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]] / (g_1, \dots, g_p)$ (localement!) donc $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]] / (g_1, \dots, g_p)$

et $\beta \otimes g = \beta \otimes (g(0) + m)$ où $m \in \mathcal{M}_0$ (développ. en série entière)
 $= \beta \otimes g(0) \cdot 1 = g(0) \beta \otimes 1$.

* quasi-fini \Rightarrow fini:

Th. 1.1 (e) $\Rightarrow \varphi'_* F = \mathcal{O}_S$ -module de présentation finie

Th. 1.1 (c) et (d) $\Rightarrow (\varphi'_* F)_0 = F_x$

Donc $F_x = \mathcal{O}_{S,0}$ -module de type fini (il suffit de passer à la limite inductive dans la suite exacte

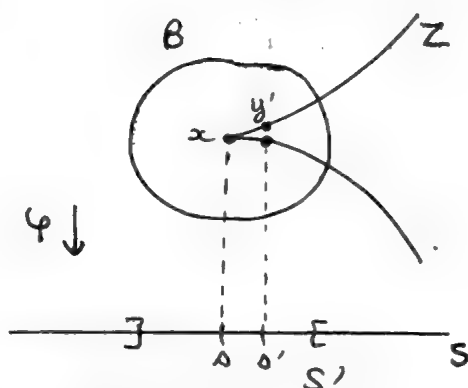
$$\mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{O}_S^p \rightarrow \varphi'_* F \rightarrow 0$$

pour obtenir:

$$\mathcal{O}_{S,0}^n \rightarrow \mathcal{O}_{S,0}^p \rightarrow F_x \rightarrow 0$$

compte tenu des 2 remarques précédentes. F_x est bien de $\mathcal{O}_{S,0}$ -présentation finie

(2) Si F est fini en x , on peut appliquer le Th. 1.1:



B = voisinage de x satisfaisant 1.1.

* Si $y' \in B \setminus Z$, $F_{y'} = 0$ donc F est fini en y' .

* Si $y' \in B \cap Z$, en utilisant le Th. 1.1 (e), (d) et on obtient (comme dans la démonstration de quasi-fini \Rightarrow fini ci-dessus):

$$\mathcal{O}_{S'}^n \rightarrow \mathcal{O}_{S'}^p \rightarrow \bigoplus_{y \in Z} F_y \rightarrow 0$$

surjective

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{pr}_{y'} \\ F_{y'} \\ \downarrow \end{array}$$

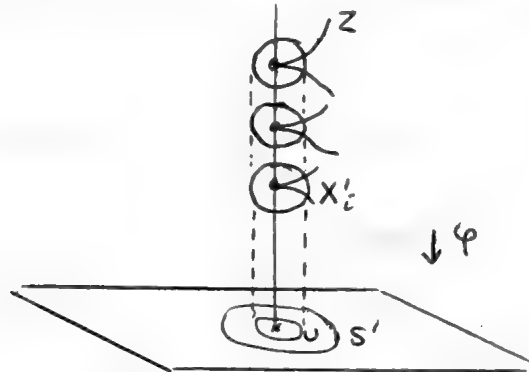
donc F_y de type fini

\Downarrow
 F fini en y'

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & X \\ & \searrow \varphi|_Z & \downarrow \varphi \\ & & S \end{array}$$

(a) $\left\{ \begin{array}{l} \varphi|_Z \text{ propre} \\ F \text{ quasi-fini en tout point} \end{array} \right. \Rightarrow \text{tous les points de la fibre } \varphi^{-1}(s) \text{ sont isolés dans } Z.$ (1.1)

(a) $\Rightarrow \varphi^{-1}(s) \cap Z$ possède un nombre fini de points



* Supposons que $s \in \text{Sm} \varphi$:

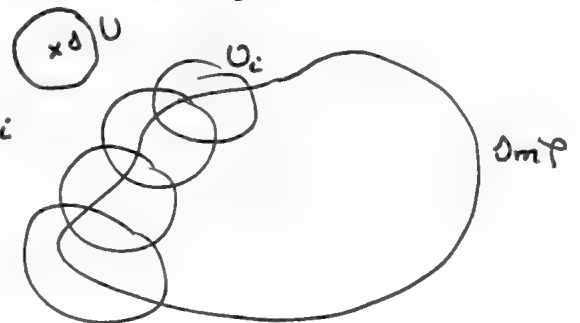
Notons $\varphi^i \equiv \varphi|_{X'_i}$ où $X'_i = \text{vois. d'un point d'indice } i \text{ de } \varphi^{-1}(s) \cap Z$.

$\varphi^i_* F$ est un \mathcal{O}_S -module de présentation finie d'après le Th. 1.1 et l'on a clairement $\varphi_* F = \bigoplus_{i \text{ fini}} \varphi^i_* F$ puisque $\Gamma(\varphi^{-1}(U), F) = \bigoplus \Gamma(\varphi_i^{-1}(U), F)$,

les ouverts X'_i étant choisis disjoints.

De $\varphi_* F = \bigoplus_{i \text{ fini}} \varphi^i_* F$ on déduit que $\varphi_* F$ est de présentation finie (toujours au voisinage de s) (C'est une tautologie : la notion de \mathcal{O}_S -module de présentation finie étant stable par somme directe finie)

* Si $s \notin \text{Sm} \varphi$, on suppose que l'on a déjà recouvert $\text{Sm} \varphi$ par des ~~ou~~ voisinages U_i fermés de pts de $\text{Sm} \varphi$ où $\varphi_* F|_{U_i}$ est de présentation finie. On choisit $s \notin \bigcup U_i$ et n'importe quel voisinage U de s ne rencontrant pas $\bigcup U_i$. Alors $\varphi_* F|_U = 0$ est de présentation finie, puisque :



$$F = j_* j^{-1} F \quad (j \text{ inclusion fermée})$$

(b) $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_* F = \varphi_* j_* F|_Z = (\varphi|_Z)_* (F|_Z) \text{ et } \varphi|_Z \text{ propre, donc fermée, donc} \\ (\varphi_* F)_{s'} = (F|_Z)_{\varphi|_Z^{-1}(s')} = (F|_Z)_{\emptyset} = 0 \text{ pour tout } s' \text{ dans } U. \end{array} \right.$

(NB: $s' \notin \varphi(X) \Rightarrow s' \notin \varphi(Z)$)

(4)

On a $\{s \in S \mid (\varphi_* F)_s = 0\} = S \setminus \varphi(Z)$ puisque :

* Si $s \in \text{Im } \varphi$, on a en (3) que :

$$\varphi_* F = \bigoplus_{\text{fini}} \varphi_*^i F \quad (\text{restriction au voisinage de } s)$$

$$\text{d'où } (\varphi_* F)_s = \bigoplus_{y \in \varphi^{-1}(s) \cap Z} F_y$$

donc :

$$(\varphi_* F)_s = 0 \Leftrightarrow F_y = 0 \quad \forall y \in \varphi^{-1}(s) \cap Z \Leftrightarrow s \notin \varphi(Z)$$

* Si $s \notin \text{Im } \varphi$, on fait comme en (b) ci-dessus : on recouvre $\text{Im } \varphi$ par des voisinages fermés pour obtenir $\bigcup U_i$. Si $s \in \bigcup U_i$ c'est fini (tout le problème est local !) sinon, on prend $U = \text{voisinage de } s \text{ n'intersectant pas } \bigcup U_i$. Le calcul (b) précédent donne $\forall s' \in U \quad s' \notin \varphi(Z)$ et on a bien $(\varphi_* F)_s = 0$.

□

1.5 Corollaire : φ fini en x

$$\exists X' \exists S' \mid \varphi' = \varphi|_{X'} : X' \rightarrow S' \text{ fini sur } S'$$

(ind : $F = \mathcal{O}_X$, $Z = X$ et * $\forall x' \in X'$ φ' quasi-fini en x'
* $\varphi'|_{Z}$ propre (cf Th 1.1 (a)))

1.6 Corollaire :

α, β = morphismes finis d'espaces analytiques

φ = morphisme d'espaces analytiques faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \alpha \searrow & & \swarrow \beta \\ & S & \end{array}$$

$$\text{et } \tilde{\varphi} : \beta_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow \alpha_* \mathcal{O}_X.$$

Alors :

φ isomorphisme d'espaces analytiques $\Leftrightarrow \tilde{\varphi}$ isomorphisme

2. Caractère topologique de la finitude

2.1 Proposition :

$\varphi: X \rightarrow S \quad x \in X \quad \text{et} \quad \varphi(x) = s$

$F = X$ -module de présentation finie et de support Z .

Alors :

$x \in \varphi^{-1}(s) \cap Z$ est isolé dans $\varphi^{-1}(s) \cap Z \iff F$ est fini en x
(ie $\dim F_x < \infty$)

L'implication (\Leftarrow) est triviale (cf Th 1.1 (c) p 65). Montrons l'implication (\Rightarrow).

2.1.1 Lemme

$A = \mathbb{C}$ -algèbre locale noethérienne

$F = A$ -module de type fini

\mathfrak{m} = idéal maximal de A

Alors :

F est un \mathbb{C} -espace vectoriel
de dimension finie $\} \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad \mathfrak{m}^k F = 0$

preuve : Une \mathbb{C} -algèbre locale noethérienne est un anneau noethérien local structuré en \mathbb{C} -algèbre, et qui soit tel que ces structures soient compatibles au sens suivant :

Si $A/\mathfrak{m} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathbb{C}$ désigne l'isomorphisme canonique entre A/\mathfrak{m} et \mathbb{C} ,
 $\alpha \mapsto \lambda$

alors $\forall b \in A \quad \alpha b = \lambda b \in A/\mathfrak{m}$ ie $\lambda b = \alpha b$

A vérifier : A/\mathfrak{m} a la même structure d'espace vectoriel sur \mathbb{C} , que cette structure provienne de φ ou de la structure canonique de \mathbb{C} -e.v. de A .

Cette remarque étant faite, on a :

(\Rightarrow) $\dots \subset \mathfrak{m}^2 F \subset \mathfrak{m} F \subset F$ est une suite décroissante d'e.v. de dimension finie, donc $\exists k \quad \mathfrak{m}^k F = \mathfrak{m} \mathfrak{m}^k F$.

Le lemme de Nakayama montre que $\mathfrak{m}^k F = 0$.

(\Leftarrow) Si $\mathfrak{m}^k F = 0$, F est structuré en A/\mathfrak{m}^k -module (cf : le produit est bien défini car $\mathfrak{m}^k F = 0$) de type fini A/\mathfrak{m}^k (car F est déjà un A -module de type fini).

$$\begin{array}{ccccccc}
 A/\mathfrak{m} & & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & & \dots & & \mathfrak{m}^{k-1}/\mathfrak{m}^k \\
 \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\
 \mathbb{C} & & A/\mathfrak{m}\text{-mod de type fini} & & & & A/\mathfrak{m}\text{-mod de type fini} \\
 \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\
 \mathbb{C} & & & & & &
 \end{array}$$

A/\mathfrak{m}^k est donc un \mathbb{C} -espace vectoriel de dim finie

or F est un A/\mathfrak{m}^k -mod de type fini, donc $F = \mathbb{C}$ -e.v. de dim finie.
CQFD

2.1.2 lemme :

$F = X\text{-mod de présentation finie, de support } Z$
 $\varphi: X \rightarrow S$
 $x \in Z$ isolé dans $Z \Rightarrow \dim F_x < \infty$

preuve :

Notons $j: X \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ l'inclusion fermée. $j_* F$ est le faisceau prolongé par 0 de F . La suite exacte :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n/\mathbb{C}}|_X^p \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n/\mathbb{C}}|_X^q \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

donne :

$$\left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n/\mathbb{C}}\right)^p \longrightarrow \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n/\mathbb{C}}\right)^q \longrightarrow j_* F \longrightarrow 0 \quad (1)$$

par prolongement par 0.

$(j_* F)_x = F_x$ et $j_* F$ est de présentation finie sur \mathcal{O}_n d'après (1), puisque le conoyau de Z mod. de prés. finie est de prés. finie. De plus x est encore isolé dans $\text{Supp}(j_* F) = Z$. On peut donc se ramener au cas lisse i.e. au cas où :

$$X = \mathbb{C}^n.$$

On raisonnera par récurrence sur n :

$$\bullet \underline{n=1} : \mathcal{O}_\mathbb{C}^p \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_\mathbb{C}^q \xrightarrow{\pi} F \rightarrow 0$$

hyp: 0 isolé dans le support de F .

Si $x \neq 0$, d'après l'hyp. ci-dessus, $F_x = 0$ (le tout restreint au voisinage de 0, comme d'habitude), donc θ_x est surjective et :

$$\text{mat } \theta_x = q \updownarrow \left(\begin{array}{c} \xleftarrow{p} \\ \boxed{\delta_q} \end{array} \right)$$

Il existe un mineur $q \times q$ de $\text{mat } \theta_x$ qui est non nul (passer au quotient par l'idéal maximal $\mathbb{C} = \mathcal{O}_\mathbb{C}/\mathfrak{m}$ d'où $\tilde{\theta}_x : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^q$ surjective)
 Le déterminant δ_q s'écrira donc :

$$\delta_q = x^k u \quad \text{où } u \text{ est une unité.}$$

$$\text{Si } f_0 \in F_0 \exists g_0 \in \mathcal{O}_\mathbb{C}^q / \pi(g_0) = f_0.$$

Montrons qu'alors $x^k g_0 \in \text{Im } \theta$. On résoud :

$$q \updownarrow \left(\begin{array}{c} \xleftarrow{p} \\ \boxed{\delta_q} \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x^k g_0 \quad \text{trouver } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \end{pmatrix} ?$$

$$\text{On a } A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \end{pmatrix} = x^k g_0 \quad \text{et } A^{-1} = \frac{\text{com } A}{\det A}, \quad \det A = \delta_q = x^k u$$

Donc $\text{com } A = x^k u A^{-1}$, et il suffit d'avoir :

$$x^k u \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \end{pmatrix} = x^k \text{com } A (g_0)$$

$$\uparrow \uparrow$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \text{com } A (g_0)$$

Cela étant, $x^k g_0 = x^k f_0 = \pi(x^k g_0) = 0$ car $x^k g_0 \in \text{Im } \theta$,
 et ceci pour tout $f_0 \in F_0$, donc

$$x^k F_0 = 0$$

$$\Downarrow (2.1.1) \text{ p } 74$$

$$\dim_{\mathbb{C}} F_0 < \infty$$

• Récurrence sur n :

Hyp: 0 isolé dans Z

$F = X$ -mod. de présentation finie, de base \mathbb{C}^n , de support Z

$$\begin{array}{ccc}
 & i^{-1}(Z) & Z \\
 \mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} / (x_2, \dots, x_n) & \xleftarrow{(x_2, \dots, x_n)=0} & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}_{x_1} & \xrightarrow{i} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \\
 & \xrightarrow{\quad} & (x_1, 0)
 \end{array}$$

Rappelons que $i^*F \stackrel{(1)}{=} \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} i^{-1}F$ où la structure de $i^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ -mod de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ est donnée par la flèche naturelle de $\text{Hom}(i^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$

$$(i^*F)_{x_1} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}, x_1} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_{(x_2, 0)}} F_{(x_1, 0)} \quad \text{car}$$

$$= F_{(x_1, 0)} / (x_2, \dots, x_n) \quad \text{car } \mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} / (x_2, \dots, x_n)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \mathbb{C} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}})_0} F_{(x_1, 0)} \quad \text{car } \mathbb{C} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}} / (x_2, \dots, x_n)$$

Affirmation: $\begin{cases} i^*F \text{ est de présentation finie} \\ x_1 = 0 \text{ est isolé dans le support de } i^*F \end{cases}$

$\text{Supp}(i^*F) \subset i^{-1}Z$ car (1) donne, fibre à fibre,

$(i^{-1}F)_x = 0 \Rightarrow (i^*F)_x = 0$ donc $\text{Supp}(i^*F) \subset \text{Supp}(i^{-1}F) = i^{-1}Z \subset Z$

Ainsi, si 0 est isolé dans Z, il le sera à fortiori dans $\text{Supp}(i^*F)$

D'après l'hypothèse au rang 1, on a $\dim (i^*F)_0 < \infty$ d'où (cf (2))

$$\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}})_0} F_{(x_1, 0)})_{x=0} < \infty \quad (3)$$

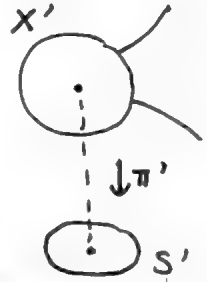
On peut donc appliquer le Théorème des morphismes finis pour la situation :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} & & \\ \pi \downarrow & \text{pour } F \text{ et } 0 \in \mathbb{C}^n, & \\ \mathbb{C}^{n-1} & & \end{array}$$

- car 1) F est de présentation finie
2) d'après (3), F est quasi-fini en 0.

Alas :

- * $\pi'_* F = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}}$ -module de présentation finie
- * 0 est isolé dans le support de $\pi'_* F$ (cf. Th.1.1 (d))
car $(\pi'_* F)_x = \bigoplus_{y \in \pi'^{-1}(x) \cap Z} F_y = 0$ si X' est assez petit, car 0 isolé dans $Z = \text{Supp } F$!)



L'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ implique $\dim_{\mathbb{C}} (\pi'_* F)_0 < \infty$
On a $(\pi'_* F)_0 = F_0$ d'où $\dim_{\mathbb{C}} F_0 < \infty$
(Th.1.1 (d))

□□□

preuve de la prop. 2.1 :

- (\Leftarrow) trivial (cf. Th.1.1 (c))
(\Rightarrow) Notons $\pi^{-1}(s) \xrightarrow{i} X$

$$\left\{ \begin{array}{l} i^* F \text{ présentation finie} \\ x \text{ isolé dans } Z \cap \pi^{-1}(s) \Rightarrow x \text{ isolé dans } \text{Supp } i^* F \end{array} \right.$$

donc (cf. lemme 2.1.2) $\dim (i^* F)_x < \infty$

$$\updownarrow \text{ (on a : } \dim_{\mathbb{C}} (F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathbb{C}) < \infty \text{ cf. Rem 1.2.1 b) p 65 vers 66)}$$

□□□ quasi-finité en x

2.2 Corollaire : $\varphi: X \rightarrow S$ est un morphisme fini en x ssi x est isolé dans la fibre $\varphi^{-1}(s)$ où $s = \varphi(x)$.

preuve : C'est 2.1 p 74 avec $F = \mathcal{O}_X$ (compte tenu de la déf. 1.3 p 72)

2.3 Proposition:

X espace analytique

$F = X$ -module de présentation finie

X_1, \dots, X_p espaces analytiques dont les germes en x sont les composantes
intègres de X . On a $\{X\} = \{X_1\} \cup \dots \cup \{X_p\}$

Alors:

F fini sur S en x



$\forall i, F_i$ fini sur S en x , où $F_i = F|_{X_i} = \text{faisceau restreint à } X_i$

preuve: $\pi: X \rightarrow S$

$Z = \text{Supp } F$, $Z_i = \text{Supp } F_i$, $Z_i = Z \cap X_i$?

x isolé dans $Z \cap \pi^{-1}(s) \Leftrightarrow F$ fini en x

$\Updownarrow (*)$

x isolé dans $Z_i \cap \pi^{-1}(s) \Leftrightarrow F_i$ fini en x ($\forall i$)

Si l'on montre que $Z_i = Z \cap X_i$, on aura gagné puisque l'équivalence (*) sera assurée.

Montrons donc que $Z_i = Z \cap X_i$:

1) $Z_i \subset Z \cap X_i$ car $F_i = F/I_i$ où $I \subset I_i$, I_i idéal premier minimal

2) $Z \cap X_i \subset Z_i$?

$\forall z \in X_i$ les fonctions de l'idéal I_i s'annulent en z , donc

$I_i \subset \mathfrak{m}_z$ où \mathfrak{m}_z = idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,z}$.

Ainsi pour tout $z \in X_i$:

$$F_{i,z} = \left(F/I_i \right)_z = F_z / I_{i,z} \quad \text{or } F_{i,z} = 0 \Rightarrow F_z / I_{i,z} = 0 \Rightarrow F_z = 0$$

$\xrightarrow[\text{p: } F \rightarrow F/A]{\text{HCB}}$
 $\xrightarrow[\text{p(B)}]{F/A}$
 $\xrightarrow[\text{p(B)}]{\cong} F/B$

(Nakayama)

□□□

Chapitre 7

Faisceaux Cohérents

Notations : On écrira toujours "de type fini" au lieu de "localement de type fini" pour simplification. Prendre garde. (idem pour "de présentation finie").

1. Définition et premières propriétés :

1.1 Définition :

Soient X un espace annelé et F un X -module.

On dit que F est un faisceau cohérent si :

(a) F est de type fini

(b) Pour tout morphisme $\varphi: \mathcal{O}_X^p|_U \rightarrow F|_U$, $\text{Ker } \varphi$ est de type fini.

Cas particulier : \mathcal{O}_X , le faisceau structural sur X , sera cohérent ssi il vérifie la prop. (b).

1.2 Remarque : La condition (b) équivaut à la condition (b') qui suit :

(b') Tout sous- X -module de F de type fini est, en fait, de présentation finie

preuve :

(b) \Rightarrow (b') : Si $G \subset F$ est de type fini, on a une surjection $\mathcal{O}^p \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 0$
d'où $\mathcal{O}^p \xrightarrow{\pi} G \xrightarrow{\varphi} F$.

Par hypothèse, $\text{Ker } \varphi$ est de type fini d'où $\mathcal{O}^q \xrightarrow{\theta} \text{Ker } \varphi \rightarrow 0$.
Ainsi la suite :

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \xrightarrow{i} \mathcal{O}^p \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 0 \quad \text{est exacte}$$

(cf : $G \hookrightarrow F$ injective $\Rightarrow \text{Ker } \pi = \text{Ker } \varphi$)

ainsi que la suite :

$$\mathcal{O}^q \xrightarrow{i \circ \theta} \mathcal{O}^p \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 0$$

puisque $\text{Im } i \circ \theta = \text{Im } i = \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \pi$
(\mathcal{O} s'aj.) ($G \hookrightarrow F$ inj.)

(b') \Rightarrow (b) : Si $\varphi: \mathcal{O}^p \rightarrow F$, $\text{Im } \varphi$ est un sous-module de type fini de F , donc il est de présentation finie :

$$\mathcal{O}^s \rightarrow \mathcal{O}^r \rightarrow \text{Im } \varphi \rightarrow 0$$

On peut construire les flèches a_0 et a_1 :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}^s & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}^r & \xrightarrow{\beta} & \text{Im } \varphi & \rightarrow & 0 \\ a_1 \downarrow & & a_0 \downarrow & & \text{id} \downarrow \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Ker } \varphi & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}^p & \xrightarrow{\varphi} & \text{Im } \varphi \rightarrow 0 \end{array}$$

[C'est facile car les modules \mathcal{O}^r et \mathcal{O}^s sont libres, donc projectifs (*)]

$\text{id} \circ \beta: \mathcal{O}^r \rightarrow \text{Im } \varphi$ et φ surjective sur $\text{Im } \varphi \Rightarrow \exists a_0$

De même $a_0 \circ \alpha: \mathcal{O}^s \rightarrow \mathcal{O}^p$ vérifie $\text{Im}(a_0 \circ \alpha) \subset \text{Ker } \varphi$ (car $\varphi \circ a_0 \circ \alpha = \beta \circ \alpha = 0$). On pose donc $a_1 = a_0 \circ \alpha$.]

Le lemme du serpent donne la suite exacte du Ker-Coker :

$$\text{Ker id} = 0 \rightarrow \text{Coker } a_1 \rightarrow \text{Coker } a_0 \rightarrow \text{Coker id} = 0$$

donc $\text{Coker } a_1 \simeq \text{Coker } a_0 \Leftrightarrow \frac{\text{Ker } \varphi}{\text{Im } a_1} \simeq \frac{\mathcal{O}^p}{\text{Im } a_0}$ est de

type fini (cf $\mathcal{O}^p \rightarrow \frac{\mathcal{O}^p}{\text{Im } a_0} \rightarrow 0$)

Cela étant, on a :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Im } a_1 & \rightarrow & \text{Ker } \varphi & \rightarrow & \frac{\text{Ker } \varphi}{\text{Im } a_1} \rightarrow 0 \\ & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & & & \underbrace{\hspace{2cm}} \\ & & \text{de type fini} & & & & \text{de type fini} \\ & & (\text{cf } \mathcal{O}^s \rightarrow \text{Im } a_1 \rightarrow 0) & & & & \end{array}$$

donc $\text{Ker } \varphi$ de type fini, d'après la lemme 1.2.1.

Ce qui prouve la remarque 1.2.

(*) Un R -module X est dit projectif si pour toute suite exacte $A \xrightarrow{g} B \rightarrow 0$ et morphisme $f: X \rightarrow B$, il existe $h: X \rightarrow A$ / $g \circ h = f$.

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow f & \downarrow & \searrow & \\ A & \xrightarrow{g} & B & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Si X est libre, il est projectif (prendre un système générateur et définir h sur 1 tel syst.)

lemme 1.2.1 : (classique)

A, C de type fini $\Rightarrow B$ de type fini, où :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{O}^n & & \mathcal{O}^k & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

preuve : On peut compléter le diagramme de la sorte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}^n & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}^n \oplus \mathcal{O}^k & \xrightarrow{p_2} & \mathcal{O}^k \rightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow \varphi & \swarrow \varphi & \downarrow v \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

où φ vérifie $\beta\varphi = v$ (φ existe car \mathcal{O}^k est libre donc projectif)

Les lignes et les colonnes sont exactes et les carrés commutent. En effet :

$$\begin{cases} (\alpha u + \varphi)(x) = \alpha u(x) \\ \beta(\alpha u + \varphi)(x, y) = \beta(\alpha u(x) + \varphi(y)) = \beta\alpha(u(x)) + \beta\varphi(y) = v(y) \end{cases}$$

car $\beta\alpha = 0$

$\alpha u + \varphi$ est surjective :

$$\begin{aligned} \forall b \in B \quad \beta(b) \in C &\Rightarrow \exists y \in \mathcal{O}^k / v(y) = \beta(b) \\ \text{Alors } \varphi(y) - b &\in \text{Ker } \beta \Rightarrow \exists a \in A \quad \varphi(y) - b = \alpha(a) \\ \text{et } \exists x \in \mathcal{O}^n / u(x) &= a \\ \text{de sorte que l'on obtienne bien } &b = \alpha u(x) + \varphi(y) \in \text{Im } \alpha u + \varphi \end{aligned}$$

\square

1.2.2 : Remarque : F cohérent $\Rightarrow F$ de présentation finie.

F vérifie (a) donc $\mathcal{O}^p \xrightarrow{\varphi} F \rightarrow 0$, et vérifie (b) donc $\text{Ker } \varphi$ est de type fini, donc $\mathcal{O}^q \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow 0$.

D'où puisque $\text{Ker } \varphi \hookrightarrow \mathcal{O}^p$ et $\mathcal{O}^q \rightarrow \text{Ker } \varphi$ surjective :

$$\mathcal{O}^q \rightarrow \text{Ker } \varphi \xrightarrow{i} \mathcal{O}^p \xrightarrow{\varphi} F \rightarrow 0$$

$$\mathcal{O}^q \rightarrow \mathcal{O}^p \rightarrow F \rightarrow 0$$

(NB: Si $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} 0 \xrightarrow{\delta} E$ et si β surjective et γ injective, alors on a la p.e. $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\gamma\beta} D \xrightarrow{\delta} E$)

1.3 lemme : Soit F un X -module,

- || (1) F vérifie (a) \Rightarrow tout quotient de F vérifie (a)
 || (2) F vérifie (b) \Rightarrow tout sous-module de F vérifie (b)

preuve :

(1) $\mathcal{O}^p \rightarrow F \rightarrow 0$ (dans la catégorie des faisceaux)

$$F \rightarrow F/G \rightarrow 0$$

On compose les surjections et l'on obtient une surjection (le vérifier fibre à fibre !)

(2) Soit G un sous-module de F et $\varphi: \mathcal{O}_X^p|_U \rightarrow G|_U$.

On a : $\mathcal{O}_X^p|_U \xrightarrow{\varphi} G|_U \xrightarrow{i} F|_U$ donc $i \circ \varphi: \mathcal{O}^p \rightarrow F$ et

donc $\text{Ker } i \circ \varphi = \text{Ker } \varphi$ de type fini.

□ F.P.

1.4 lemme :

(1) Soit $0 \rightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$ une suite exacte de X -modules.

Alors :

$$\left. \begin{array}{l} G \text{ vérifie (a)} \\ H \text{ vérifie (b)} \end{array} \right\} \Rightarrow F \text{ vérifie (a)}$$

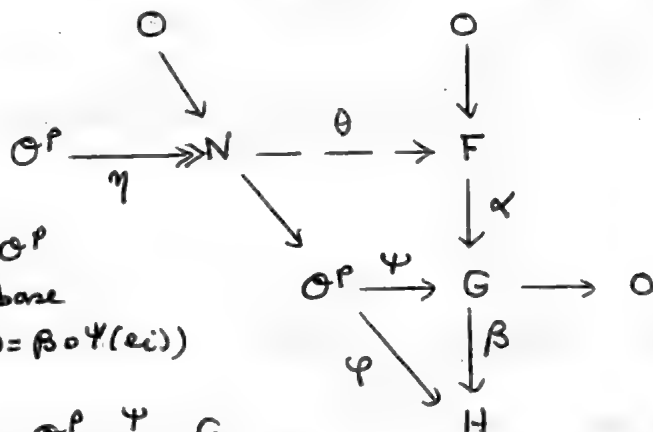
(2) Soit $F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \rightarrow 0$ une suite exacte de X -modules,

alors :

$$\left. \begin{array}{l} F \text{ vérifie (a)} \\ G \text{ vérifie (b)} \end{array} \right\} \Rightarrow H \text{ vérifie (b)}$$

preuve :

(1)



φ existe car G de type fini

On peut remonter β en φ car \mathcal{O}^p

est libre (définir φ sur la base

(e_1, \dots, e_p) de \mathcal{O}^p par $\varphi(e_i) = \beta \circ \psi(e_i)$)

On peut factoriser $\tilde{\varphi}: N \hookrightarrow \mathcal{O}^p \xrightarrow{\varphi} G$

à travers le noyau $\text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha \cong F$ car $\beta \circ \tilde{\varphi} = 0$, pour obtenir θ .

Alors θ est surjective : $\forall a \in F \quad \alpha(a) \in G \quad \exists b \in \mathcal{O}^p / \varphi(b) = \alpha(a)$

mais $\varphi(b) = \beta \circ \psi(b) = \beta \circ \alpha(a) = 0$ donc $b \in N$ et $\tilde{\varphi}(b) = \alpha(a)$

implique par déf. $\theta(b) = a$. □ F.P.

(2) Soit $\mathcal{O}^n \xrightarrow{\varphi} H$. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\
 & & & & \\
 0 & & & & 0 \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 K & \xrightarrow{\theta} & N & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 F \oplus \mathcal{O}^n & \xrightarrow{p_2} & \mathcal{O}^n & & \\
 \downarrow \psi - \alpha & \swarrow \psi & \downarrow \varphi & & \\
 G & \xrightarrow{\beta} & H & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

lignes et colonnes exactes
carrés commutatifs
(Attention! $\beta \circ (\psi - \alpha) \neq 0$)

ψ = relèvement de φ (existe car \mathcal{O}^n est libre donc projectif)

$K = \text{Ker}(\psi - \alpha)$ est de type fini car $F \oplus \mathcal{O}^n$ l'est et G vérifie (b) (c'est le (1) ci-dessus!)

On obtient θ en factorisant $p_2' : K \rightarrow F \oplus \mathcal{O}^n \xrightarrow{p_2} \mathcal{O}^n$ (qui vérifie $\varphi \circ p_2' = 0$) à travers le noyau $\text{Ker } \varphi = N$.

θ est surjective : $\forall n \in N \subset \mathcal{O}^n \exists (x, y) \in F \oplus \mathcal{O}^n / \left\{ \begin{array}{l} \varphi(y) - \alpha(x) = 0 \\ \text{et} \\ \theta(x, y) = y = n \end{array} \right. ?$

ie $\exists x \in F / \varphi(n) - \alpha(x) = 0$?

On a : $\beta(\varphi(n)) = \varphi(n) = 0$ car $n \in N$ donc $\varphi(n) \in \text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha$
 $\subset \varphi(F)$

Le lemme 1.4 facilite la démonstration de :

1.5 Théorème : Si dans une suite exacte de X -modules

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$$

2 modules sont cohérents, le 3^e l'est aussi. Autrement dit, le quotient de 2 cohérents est cohérent (cas particulier où $H = G/F$)

preuve :

a) Si F et G cohérents, $\left. \begin{array}{l} F(a) \\ G(b) \end{array} \right\} \Rightarrow H(b)$ (line "H vérifie la propriété (b)")

$\left. \begin{array}{l} G(a) \\ H = \text{quotient de } G \end{array} \right\} \Rightarrow H(a)$

b) Si G et H sont cohérents :

$$\left. \begin{array}{l} G(a) \\ H(a) \end{array} \right\} \Rightarrow F(a)$$

$$\left. \begin{array}{l} G(b) \\ F \hookrightarrow G \end{array} \right\} \Rightarrow F(b)$$

c) Si F et H sont cohérents :

* le lemme 1.2.1 p 78 montre que G est de type fini.

* Soit $\varphi: \mathcal{O}^s \rightarrow G$. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & H \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \varphi_2 & & \uparrow \varphi & & \\ & & \text{Ker } \beta \circ \varphi & \nearrow & \mathcal{O}^s & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & \text{Ker } \varphi & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

$\beta \circ \varphi = 0$, donc $\text{Ker } \beta \circ \varphi \rightarrow \mathcal{O}^s \xrightarrow{\varphi} G$
se factorise à travers le noyau de β
ie $\exists m \times s \cong F$ pour donner $\tilde{\varphi}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} F(b) \\ H(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ker } \beta \circ \varphi \text{ de type fini} \Rightarrow \text{Ker } \varphi \text{ vérifie (a) d'après lemme 1.4.}$$

Ce qui prouve le Théorème 1.5.

1.6 Corollaire

- (1) La catégorie des X -modules cohérents est stable par somme directe \oplus
- (2) Soit $\varphi: F \rightarrow G$ un morphisme entre 2 X -modules cohérents. Alors $\text{Ker } \varphi$, $\text{Im } \varphi$, $\text{Coker } \varphi$ et $\text{Coim } \varphi$ sont cohérents.

preuve:

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow F \rightarrow G \quad \text{donc } \text{Ker } \varphi \text{ vérifie (a) (cf 1.4)}$$

(a) (a)
(b) (b)

Mais alors: $0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow F \rightarrow \text{Im } \varphi \rightarrow 0$ donc $\text{Im } \varphi$ vérifie (b)

(a) (a)
(b) (b)

D'ailleurs F vérifie (a) $\Rightarrow \text{Im } \varphi$ vérifie (a) comme quotient de F ($\text{Im } \varphi = F / \text{Ker } \varphi$)
(cf lemme 1.3)

Finalement $\text{Im } \varphi$ est cohérent. Mais alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow F \rightarrow \text{Im } \varphi \rightarrow 0$$

et le Th. 1.5 montrent que $\text{Ker } \varphi$ est aussi cohérent.

Le Th 1.5 montre aussi que $\text{Coker } \varphi = G / \text{Im } \varphi$ et $\text{Coim } \varphi = F / \text{Ker } \varphi$ sont cohérents comme quotients de 2 cohérents, ce qui achève de montrer (2).

Le (1) est évident car:

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{i} F \oplus G \xrightarrow{p_2} G \rightarrow 0 \quad \text{est exacte}$$

CQFD

1.7 Corollaire: $F, G = X$ -modules cohérents

Alors $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ est cohérent, et $F \otimes_{\mathcal{O}_X} G$ est cohérent.

preuve: D'après la remarque 1.2.2, cohérent \Rightarrow représentation finie,
donc:

$$\mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{O}^q \rightarrow F \rightarrow 0$$

d'où $0 \rightarrow \text{Hom}(F, G) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}^q, G) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}(\mathcal{O}^p, G)$

" G^q " G^p (car \mathcal{O}^p libre)

$\text{Hom}(F, G) = \text{Ker } \varphi$ est donc cohérent d'après 1.6.

De la même manière :

$$\begin{array}{ccccccc} G \otimes \mathcal{O}^p & \longrightarrow & G \otimes \mathcal{O}^q & \longrightarrow & G \otimes F & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ G^p & & G^q & & & & \end{array}$$

car \otimes est un foncteur exact à droite, donc $G \otimes F$ est cohérent en vertu de 1.6.

CQFD

1.8 Proposition : Soit $F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F''$ un complexe de faisceaux de X -modules cohérents (ie une suite semi-exacte, ie $\psi \circ \varphi = 0$). Si ce complexe est une suite exacte en un point x , il est alors exact localement autour de x .

preuve : Soit $\text{Ker } \varphi_x = \mathcal{O}_x \varphi_x$ et $\mathcal{O}_x \varphi \subset \text{Ker } \psi$.
 $\mathcal{O}_x \varphi$ et $\text{Ker } \psi$ sont cohérents donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ker } \psi / \mathcal{O}_x \varphi = \text{faisceau cohérent} \\ (\text{Ker } \psi / \mathcal{O}_x \varphi)_x = 0 \end{array} \right.$$

la proposition résulte alors du lemme suivant :

lemme : \mathcal{G} faisceau cohérent tel que $\mathcal{G}_x = 0$. Alors $\mathcal{G}|_U = 0$ où U est un voisinage de x .

Comme \mathcal{G} est de type fini, au voisinage de x $\mathcal{G}|_U$ est engendré par des sections globales sur un U , ie :

$$\begin{array}{l} \exists U \subset X \quad x \in U \quad \mathcal{O}_x^m|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U \longrightarrow 0 \\ (1, 0, \dots, 0) \longmapsto \lambda_1 \in \mathcal{G}(U) \quad (\text{cf chap 3. 10.3 p 37 vmo}) \\ \text{etc...} \end{array}$$

Mais $\lambda_{1,x} = 0 \Rightarrow \exists V_1$ voisinage ouvert de x / $\lambda_1|_{V_1} = 0$

Finalement $\mathcal{G}|_U = 0$

CQFD

1.9 Proposition : Soit X un espace annelé. Si \mathcal{O}_X est cohérent, on a l'équivalence :

$$F \text{ est } X\text{-cohérent} \Leftrightarrow F \text{ est de présentation finie}$$

preuve : (\Rightarrow) cf 1.2.2

(\Leftarrow) On utilise le Th 1.5 :

$$\mathcal{O}_X^p \rightarrow \mathcal{O}_X^q \rightarrow F \rightarrow 0 \text{ est exacte}$$

\mathcal{O}_X^q et $\mathcal{O}_X^p = \mathcal{O}_X$ -cohérent comme somme directe de cohérents, donc F apparaît comme le conoyau de \mathcal{O}_X -cohérents, donc cohérent.
CQFD

1.10 Proposition :

X espace annelé de faisceau structural \mathcal{O}_X cohérent

$F = X$ -module cohérent

Si $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que l'on ait la suite exacte :

$$L_p|_U \rightarrow L_{p-1}|_U \rightarrow \dots \rightarrow L_0|_U \rightarrow F|_U \rightarrow 0$$

$$\text{où } L_k|_U \cong \mathcal{O}_X^{n(k)}|_U$$

preuve :

$$\mathcal{O}^q|_U \xrightarrow{\tau_1} \mathcal{O}^p|_U \xrightarrow{\tau_0} F|_U \rightarrow 0 \text{ pour } U \text{ convenable.}$$

$\text{Ker } \tau_1$ est cohérent (comme noyau de τ_1 entre 2 cohérents) donc $\exists V$ vois. ouv. de x tel que $\mathcal{O}^k|_V \rightarrow \text{Ker } \tau_1|_V \rightarrow 0$

Les 2 suites exactes se recollent (comme dans la NB de la remarque 1.2.2) pour donner :

$$\mathcal{O}^k|_V \rightarrow \mathcal{O}^k|_V \rightarrow \mathcal{O}^p|_V \rightarrow F|_U \rightarrow 0$$

etc...

CQFD

2. Théorème d'Oka

|| 2.1 Théorème d'Oka : $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ est cohérent

|| 2.2 Corollaire : Si X est un espace analytique, \mathcal{O}_X (son faisceau structural) est cohérent.

preuve du corollaire : Localement $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I|_{\text{Supp } \mathcal{O}_X}$ où I est un idéal de type fini

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{O}^a \rightarrow I \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/I \rightarrow 0 \end{array} \right\}_{(1.2.2)} \Rightarrow \mathcal{O}^a \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/I \rightarrow 0 \text{ donc } \mathcal{O}/I \text{ est}$$

cohérent d'après 2.1 et 1.9.

Que dire de $\mathcal{O}/I|_{\text{Supp } \mathcal{O}/I}$?

\mathcal{O}_X est trivialement un \mathcal{O}_X -module de type fini. Il faut montrer la propriété (b) pour \mathcal{O}_X : Soit $\varphi: \mathcal{O}_X^p \rightarrow \mathcal{O}_X$. Il faut montrer que $\text{Ker } \varphi$ est de type fini. On a :

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_X^p/I}_K \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X/I|_K \quad \text{où } K = \text{Supp } \mathcal{O}_X/I = \text{fermé}$$

Si $j: K \hookrightarrow \mathbb{C}^n$, j_* est le "prolongement par 0". Comme j_* est un foncteur exact, on a : (cf (*) p 67)

$$0 \rightarrow j_* \text{Ker } \varphi \rightarrow \mathcal{O}_X^p/I \xrightarrow{j_* \varphi} \mathcal{O}_X/I$$

donc $j_* \text{Ker } \varphi \cong \text{Ker}(j_* \varphi)$ est donc de type fini.

j^{-1} est un foncteur exact :

$$0 \rightarrow j^{-1} j_* \text{Ker } \varphi \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{O}_X^p/I|_K \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X/I|_K$$

(*) Comme $j_* \text{Ker } \varphi$ est de type fini, $j^{-1} j_* \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi$ aussi. En effet :

$$(\mathcal{O}_X/I)^k \rightarrow j_* \text{Ker } \varphi \rightarrow 0 \quad \text{comme } (\mathcal{O}_X/I)\text{-modules,}$$

en appliquant j^{-1} : $(\mathcal{O}_X/I)^k|_K \rightarrow j^{-1} j_* \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi \rightarrow 0$ comme $(\mathcal{O}_X/I)|_K$ -mod
" $()|_K$

ce qui prouve 2.2.

Notons le lemme :

lemme : Si $X \xrightarrow{\lambda} Y$, $F = B$ -module de type fini $\Rightarrow \lambda^{-1}F$ est un $\lambda^{-1}B$ -module de type fini. (appliquer λ^{-1} exact)

utilisé en (*) ci-dessus.

preuve du Théorème d'Oka

Soons $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} = {}_n\mathcal{O}$. Il s'agit de montrer que pour tout morphisme ${}_n\mathcal{O}^m|_U \xrightarrow{\varphi} {}_n\mathcal{O}|_U$ donné localement sur un ouvert, $\text{Ker } \varphi$ est de type fini quitte à restreindre U .

On notera :

$$\begin{array}{ccc} {}_n\mathcal{O}^m|_U & \xrightarrow{\varphi} & {}_n\mathcal{O}|_U \\ (1, 0, \dots, 0) & \longmapsto & b_1 \in {}_n\mathcal{O}(U) \\ \dots & & \dots \\ (0, \dots, 0, 1) & \longmapsto & b_m \in {}_n\mathcal{O}(U) \end{array}$$

- Si $n=0$, ${}_0\mathcal{O} = \mathbb{C}$ est un espace vectoriel et il n'y a rien à montrer.
- Si $m=1$ (n'importe lequel), c'est évident, puisque

$$g_n \xrightarrow{\varphi_x} g_n b_1$$

φ_x est un morphisme de ${}_n\mathcal{O}_x$ -modules. De 2 choses l'une :

$$\rightarrow b_{1,x} = 0 \Rightarrow \exists V \text{ vois. ouv. de } x \quad b_1|_V = 0$$

$$\rightarrow b_{1,x} \neq 0 \Rightarrow \exists V \text{ vois. ouv. de } x \quad b_1|_V \neq 0$$

ce qui prouve que φ est soit nulle (ie $\text{Ker } \varphi = {}_n\mathcal{O}^m$) soit injective (ie $\text{Ker } \varphi = \{0\}$) sur V .

- On va procéder par récurrence sur n . Soit $n > 1$ et supposons le Théorème d'Oka vrai aux rangs $< n$. Soit $m \geq 1$, et prenons $x=0 \in U$. Examinons plusieurs cas suivant b_1, \dots, b_m :

1) b_1 est une unité (ie $b_1(0) \neq 0$)

$$\begin{array}{ccc} {}_n\mathcal{O}^m|_U & \xrightarrow{\varphi} & {}_n\mathcal{O}|_U \\ (g_1, \dots, g_m) & \longmapsto & \sum_{i=1}^m g_i b_i \end{array}$$

$(g_1, \dots, g_m) \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m g_i b_i = 0$ donc quitte à diminuer l'ouvert U , je peux écrire $g_1 = -\frac{1}{b_1} \left(\sum_{j=2}^m g_j b_j \right)$ où $\frac{1}{b_1} \in {}_n\mathcal{O}(U)$

D'où un isomorphisme de \mathcal{O} -modules :

$${}_n\mathcal{O}^{m-1}|_U \xrightarrow{\sim} \text{Ker } \varphi$$

$$(g_2, \dots, g_m) \longmapsto \left(-\frac{1}{b_1} \sum_{j=2}^m g_j b_j, g_2, \dots, g_m \right)$$

$\text{Ker } \varphi$ est donc de type fini.

β) Cas où $b_1(0) = \dots = b_m(0) = 0$

Choisissons z_n / $\forall i \in [1, m]$ $b_i(z_n, 0) \neq 0$. Le théorème de préparation de Weierstrass (chap 4. Prop 2.4 p 43) montre que l'on peut écrire localement :

$$b_i(z) = \left(z_n^{d_i} + a_{1,i}(z') z_n^{d_i-1} + \dots + a_{d_i,i}(z') \right) \omega_i(z)$$

où $a_{i,j}(0) = 0$ et où les $\omega_i(z)$ sont des unités.

Notons brièvement $b_i = g_i \omega_i$ où g_i est un polynôme de Weierstrass au point 0 par rapport à la variable z_n .

Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} {}_n\mathcal{O}|_U^m & \xrightarrow{\varphi} & {}_n\mathcal{O}|_U \\ \left(\begin{smallmatrix} \omega_1 & \dots & \omega_n \\ 0 & \dots & 0 \end{smallmatrix} \right) \downarrow \wr & & \parallel \\ {}_n\mathcal{O}|_U^m & \xrightarrow{(g_1, \dots, g_m)} & {}_n\mathcal{O}|_U \end{array} \quad \text{est commutatif.}$$

donc $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } (g_1, \dots, g_m)$. On s'est ramené au cas où tous les polynômes b_1, \dots, b_m sont de Weierstrass par rapport à la même variable z_n . C'est le cas β) qui suit :

8) Cas où : $\varphi = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{O}_U^m \rightarrow \mathcal{O}_U$ et où chaque fonction f_i est un polynôme de Weierstrass par rapport à la variable z_n .

Notons

$$f_i(z) = z_n^{d_i} + a_{1,i}(z') z_n^{d_i-1} + \dots + a_{d_i,i}(z') \quad a_{i,j}(0) = 0$$

$$d = \sup (\deg_{z_n} f_i)$$

$$a_{i,j}(z') \in_{n-1} \mathcal{O}(U') \quad \text{où } U \subset U' \times \mathbb{A}^1$$

$$pr_1 : U' \times \mathbb{A}^1 \rightarrow U'$$

$$\mathcal{R} = pr_1^{-1}(\mathcal{O}_{U'}) \subset \mathcal{O}_{U' \times \mathbb{A}^1}$$

$$\mathcal{R}[z_n]_{\leq d} = \text{esp. vect des polynômes de degrés } \leq d \text{ et à coeff. dans } \mathcal{R}.$$

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_U^m & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathcal{O}_U \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{R}[z_n]_{\leq d} & \xrightarrow[\psi]{} & \mathcal{R}[z_n]_{\leq 3d} \end{array}$$

Lemme 2.1.1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta : X \rightarrow Y \\ F = \mathcal{O}_Y \text{-module cohérent} \end{array} \right\} \Rightarrow \beta^{-1}(F) \text{ est un } \beta^{-1}(\mathcal{O}_Y)\text{-module cohérent}$$

preuve : $\beta^{-1}(F)$ est de type fini car β^{-1} est un foncteur exact et $\beta^{-1}(\mathcal{O}_Y^P) = \beta^{-1}(\mathcal{O}_Y)^P$.

Soit $\varphi : \beta^{-1}(\mathcal{O}_Y)^q \rightarrow \beta^{-1}(F)|_U$. Montrons que $\text{Ker } \varphi$ est de type fini.

$$(1, 0, \dots, 0) \mapsto g_1$$

$$(0, 0, \dots, 0, 1) \mapsto g_p$$

Quitte à restreindre U , $g_i = h_i \circ \beta$ où $h_i \in F(V)$ $V \in Y$ et $\beta(U) \subset V$. Posons :

$$\mathcal{O}_Y^p(V) \xrightarrow{\psi} F(V)$$

$$(1, 0, \dots, 0) \mapsto h_1$$

$$(0, \dots, 0, 1) \mapsto h_p$$

$\text{Ker } \psi$ est de type fini par hypothèse,

$$\text{donc } \mathcal{O}_Y^q \xrightarrow{\varphi} \text{Ker } \psi \rightarrow 0$$

$$\text{et donc } \beta^{-1}(\mathcal{O}_Y)^q \xrightarrow{\varphi} \beta^{-1}(\text{Ker } \psi) \rightarrow 0$$

Mais $\beta^{-1}(\text{Ker } \psi) = \text{Ker } \varphi$ donc $\text{Ker } \varphi$ est bien de type fini.

$u = v \circ \beta \mapsto v$ localement

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ g_1 \nearrow & & \downarrow h_1 \\ X & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Conséquence: R est cohérent par hypothèse de récurrence.

$R[z_n]_{2d}$ est un R -module libre de type fini, somme directe de $2d$ modules cohérents, donc $R[z_n]_{2d}$ est cohérent.

Donc $\text{Ker } \Psi$ est de type fini.

On aura montré que $\text{Ker } \Psi$ est de type fini si nous arrivons à montrer que :

$$\forall u \in U' \times \mathbb{C} \quad \text{Ker } \Psi_u = (\text{Ker } \Psi_u) \cdot ({}_n \mathcal{O}_u) \quad (1)$$

1) Hypothèse forte :

$$\text{Hyp.} \left\{ \begin{array}{l} b_1(z) = z_n^{d_1} + a_{d_1,1}(z') z_n^{d_1-1} + \dots + a_{1,1}(z') \quad a_{i,j} \in \mathcal{O}(U') \quad a_{i,j}(0) = 0 \\ \text{est de Weierstrass au point } u = (u', u'') \in U' \times \mathbb{C} \text{ voisin de } 0, \text{ i.e.} \\ \left\{ \begin{array}{l} b_1(z) = (z_n - u'')^{e_1} + b_{1,1}(z' - u') (z_n - u'')^{e_1-1} + \dots + b_{e_1,1}(z' - u') \\ b_{i,j}(0) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors $e_1 = d_1 \leq d$ et :

$$(\chi_1, \dots, \chi_m) \in (\text{Ker } \Psi)_u \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \chi_i b_i = 0$$

Le théorème de division de Weierstrass permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{2,u} = b_{1,u} a_{1,u} + b_{2,u} \\ \dots \\ \chi_{m,u} = b_{1,u} a_{m,u} + b_{m,u} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{i,u} \in {}_n \mathcal{O}_u \\ b_{j,u} \in R[z_n]_d \end{array} \right.$$

de sorte que $(\chi_1, \dots, \chi_m) \in (\text{Ker } \Psi)_u$ si :

$$\underbrace{(\chi_{1,u} + b_{2,u} a_{2,u} + \dots + b_{m,u} a_{m,u})}_{b_1} \underbrace{b_{1,u}}_{\text{polynôme de Weierstrass en } u} + \underbrace{b_{2,u} b_{2,u} + \dots + b_{m,u} b_{m,u}}_{\in R[z_n]_{2d}} = 0 \quad (2)$$

(2) $\Rightarrow b_1$ est un polynôme en z_n au voisinage de u (*) En effet :

Lemme: $bg = h \in R[z_n]_d$ où $h = a_0(z') z_n^d + \dots + a_d(z')$; $g = \sum_{i=0}^p \lambda_i(z') z_n^i$; $f = z_n^p + c_1(z') z_n^{p-1} + \dots + c_p(z')$ polynôme de Weierstrass en z_n ($c_i(0) = 0$). Alors g est un polynôme en z_n .

preuve: Égalité des coeff. en $h \geq d+1$: $\left\{ \begin{array}{l} 0 = c_p(z') \lambda_{d+1}(z') + c_{p-1}(z') \lambda_d(z') + \dots + \lambda_{d+1-p}(z') \quad (\text{en } z_n^{d+1}) \\ 0 = c_p(z') \lambda_{d+2}(z') + c_{p-1}(z') \lambda_{d+1}(z') + \dots + \lambda_{d+2-p}(z') \quad (\text{en } z_n^{d+2}) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (I)$

(I) et $c_i(0) = 0 \Rightarrow \lambda_{d+1-p}(0) = 0$

donc $\lambda_{d+1-p}(z') \in \mathcal{M} = \text{idéal maximal de } \mathcal{O}_{z'}$. De même $\lambda_i(z') \in \mathcal{M} \quad \forall i \geq d+1-p$. Mais alors

le système (I) montre que $\lambda_i(z') \in \mathcal{M}^2$ pour $i \geq d+1-p$ et ainsi de suite.

Finalement $\lambda_i(z') \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}^k = 0 \quad \forall i \geq d+1-p$ (cf th. Krull: $\bigcap_{k \geq 0} \mathcal{M}^k = 0$ si l'anneau est local noethérien c.q.f.d.)

(*) NB: $(1-z) \sum z^n = 1$ et $\sum z^n$ non polynôme, car $1-z$ non de Weierstrass en 0.)

Alors :

$$\begin{aligned}
 (x_1, \dots, x_m)_u &= (b_1, \dots, b_m) + (-b_2 a_2 + \dots + b_m a_m, b_1 a_2, \dots, b_1 a_m)_u \\
 &= \underbrace{(b_1, \dots, b_m)}_{\in \text{Ker } \Psi_u} + a_2 \underbrace{(-b_2, b_1, 0, \dots, 0)}_{\in \text{Ker } \Psi_u} + \dots + a_m \underbrace{(-b_m, 0, \dots, 0, b_1)}_{\in \text{Ker } \Psi_u} \\
 &\quad \text{d'après (2), et puisque } b_1, \dots, b_m \text{ sont des polynômes} \\
 &\quad \text{en } z_1 \text{ donc dans } \mathbb{R}[z_1]_{2d}
 \end{aligned}$$

car $b_1(-b_2) + b_2(b_1) = 0$

Finalement, cela signifie bien que $\text{Ker } \Psi_u \subset {}_n\Theta_u$. $\text{Ker } \Psi_u$ donc (1).

82) Si on n'a pas l'hypothèse forte, on aura toujours $\beta_1 = e\beta$ où $e \in {}_n\Theta_u$ est une unité et β est un polynôme de Weierstrass en u (cf Th. de préparation de Weierstrass).

$$\begin{array}{ccc}
 {}_n\Theta_u^m & \xrightarrow[\theta]{(b_1, b_2, \dots, b_m)} & \Theta_u \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{R}[z_1]_{2d} & \xrightarrow{\Xi_u} & \mathbb{R}[z_1]_{3d}
 \end{array}$$

En notant $\theta = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, on a, d'après le cas 81) ci-dessus :

$$(1) \text{Ker } \theta_u = ({}_n\Theta_u) \cdot (\text{Ker } \Xi_u)$$

Il suffit alors de remarquer que :

$$\begin{aligned}
 (x_1, \dots, x_m) \in \text{Ker } \Psi &\Leftrightarrow (x_1, \frac{x_2}{e}, \dots, \frac{x_m}{e}) \in \text{Ker } \theta \\
 \uparrow \Downarrow &\quad \quad \quad \uparrow \Downarrow \\
 x_1 b_1 + \dots + x_m b_m = 0 &\Leftrightarrow x_1 \beta + \frac{x_2}{e} b_2 + \dots + \frac{x_m}{e} b_m = 0
 \end{aligned}$$

Donc d'après (1) pour θ_u :

$$(x_1, \dots, x_m) \in \text{Ker } \Psi \Leftrightarrow (x_1, \frac{x_2}{e}, \dots, \frac{x_m}{e}) = \sum_{j \in J \text{ fini}} d_j \beta_j \quad (3)$$

$$\text{où } \beta_j = (\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,m}) \in \text{Ker } \Xi_u$$

Mais alors $\tilde{\beta}_j = (\beta_{j,1}, e\beta_{j,2}, \dots, e\beta_{j,m}) \in \text{Ker } \Psi_u$ de sorte que

$$(3) \text{ donne : } (x_1, \dots, x_m) = \sum_{j \in J} d_j \tilde{\beta}_j \quad d_j \in {}_n\Theta_u \quad \tilde{\beta}_j \in \text{Ker } \Psi_u$$

ce qui prouve bien la formule (1) dans le cas général.

Chapitre 8

Etude locale d'un espace analytique.

1. Position d'un espace analytique en un point.

1.1 Définition : (X, x) espace analytique pointé $E = \text{e.v. de dim finie}$

Une position de X en x est la donnée d'un germe $\varphi_x : (X, x) \rightarrow E$ de morphisme fini (cf 1.3 p 72) dont le comorphisme $\varphi_x^* : \mathcal{O}_{E, \varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ est injectif.

1.2 lemme : Soit $\varphi_x : (X, x) \rightarrow E$, E e.v. de dim finie. Supposons que φ_x soit fini et φ_x^* non injectif. Alors il existe un sous-espace vectoriel $E' \subsetneq E$ et un germe de morphisme fini $\psi_x : (X, x) \rightarrow E'$.

preuve :

Comme φ_x^* n'est pas injective, $\exists h \in \mathcal{O}_{E, \varphi(x)}$ $\varphi_x^*(h) = 0$ et h non identiquement nulle, donc on peut choisir une coordonnée z_n dans E de sorte que :

$$h(z_n, 0) \neq 0$$

Soit E' le sous-espace vectoriel de E défini par les coordonnées $(z_1, \dots, z_{n-1}) = z'$ complémentaires. On a :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{E, \varphi(x)} & \xrightarrow{\varphi_x^*} & \mathcal{O}_{X, x} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{O}_{E, \varphi(x)} / h & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} (X, x) & \xrightarrow{\varphi_x} & E & \xrightarrow{\pi} & E' \\ \mathcal{O}_{E', \pi \varphi(x)} & \xrightarrow{\pi^*} & \mathcal{O}_{E, \varphi(x)} & \xrightarrow{\varphi_x^*} & \mathcal{O}_{X, x} \end{array}$$

où l'on note $\pi : E \rightarrow E'$
 $(z_n, z') \mapsto z'$

Le théorème de Weierstrass (2.3 p 42) montre que $\mathcal{O}_{E, \varphi(x)} / h$ est un $\mathcal{O}_{E', \pi \varphi(x)}$ -module de type fini.

φ_x fini $\Leftrightarrow \mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{O}_{E, \varphi(x)}$ -module de type fini, donc à fortiori $\mathcal{O}_{X, x}$ est un $\mathcal{O}_{E, \varphi(x)} / h$ -module de type fini (*).

Finalement $\mathcal{O}_{X, x}$ est bien un $\mathcal{O}_{E', \pi \varphi(x)}$ -module de type fini, ie $\pi \circ \varphi_x$ est fini.
 C.Q.F.D

(*) la structure de $\mathcal{O}_{X, x}$ est donnée grâce au comorphisme $\varphi_x^* : \mathcal{O}_{E, \varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$,
 $\forall g \in \mathcal{O}_{X, x} \quad h \cdot g \doteq \varphi_x^*(h) \cdot g = 0$ car, puisque $h \in \text{Ker } \varphi_x^*$.

1.3 Proposition : Soit (X, x) un germe d'espace analytique. Il existe une position de X en x .

preuve : Localement, l'espace analytique X peut être plongé dans \mathbb{C}^n .
 En effet, $X = (n, U, f_1, \dots, f_p)$ est localement un modèle d'espace analytique, et $X \xrightarrow{i} U \subset \mathbb{C}^n$ est une injection analytique

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_U / (f_1, \dots, f_p) & \xleftarrow{i^*} & \mathcal{O}_U \\ \downarrow & \text{abus} & \downarrow \\ X & \xrightarrow{i} & U \end{array}$$

[$i^*: \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_X$ est le passage au quotient. En effet $i^*: \mathcal{O}_U|_X = i^{-1}\mathcal{O}_U \rightarrow (\mathcal{O}_U / (f_1, \dots, f_p))|_X = \mathcal{O}_X|_X$ est un morphisme de faisceaux car la fonction restriction $|_X = i^{-1}(\cdot)$ est exact. On passe donc au quotient puis on prend la restriction.]

i est un morphisme fini (cf 2.2 p 76) mais i^* n'est pas injectif en général.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & U \subset \mathbb{C}^n \\ \searrow \Psi_{n-1} & & \downarrow \pi_{n-1} \\ & & \mathbb{C}^{n-1} \\ & & \downarrow \pi_{n-2} \\ & & \vdots \\ & & \downarrow \pi_0 \\ & & \mathbb{C}^0 = \{pt\} \end{array}$$

- Si i^* est injectif, on s'arrête : i^* est une position de X en x .
- Sinon, le lemme 1.2 montre l'existence d'un morphisme fini $\Psi_{n-1}: X \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ (c'est une projection π_{n-1} composée avec i)

De 2 choses l'une :

- Ou bien Ψ_{n-1}^* est injectif, auquel cas on s'arrête
- Ou bien Ψ_{n-1}^* n'est pas injectif. On applique encore le lemme 1.2 pour obtenir $\Psi_{n-2}: X \rightarrow \mathbb{C}^{n-2}$, etc...

On est sûr de trouver $k \in \{0, n\}$ tel que $\Psi_k: X \rightarrow \mathbb{C}^k$ soit un morphisme fini tel que Ψ_k^* injectif puisque pour $k=0$, $\mathbb{C}^0 = \{pt\}$ et $\mathcal{O}_{\{pt\}} \cong \mathbb{C}$, donc

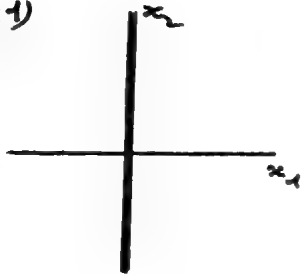
$$\mathcal{O}_{\{pt\}} = \mathbb{C} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^k, i(n)} \xrightarrow{i^*} \mathcal{O}_{X, x}$$

injectif
 (envoie 1 sur 1, puisque ces morphismes sont unitaires)
 (le voir fibre à fibre !)

NB: On a en fait montré que si $X \simeq (n, U, \beta_1, \dots, \beta_p)$, $\exists \pi: U \rightarrow E'$ projection qui inclut une position $\pi \circ i: X \rightarrow E'$ de X en x .

Intuitivement, on plonge d'abord localement l'espace analytique X au voisinage de x dans \mathbb{C}^n , puis on projette sur un sous-espace E' de \mathbb{C}^n convenable.

ex 1)

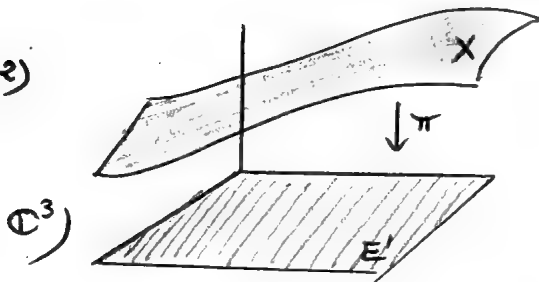


$$\mathcal{O}_{x_1, x_2} / x_1 \mid \text{Supp}(\cdot) = \{x_1 = 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ x_2 & \longmapsto & (0, x_2) \\ \text{id}_{\mathbb{C}} \searrow & & \downarrow \pi_2 \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

$$\mathcal{O}_{x_1, x_2} / x_1 \mid \{x_1 = 0\} = \mathbb{C}\{x_2\}$$

ex 2)



1.4 Prop: $(X, n) = \text{spa anal. pointé}$

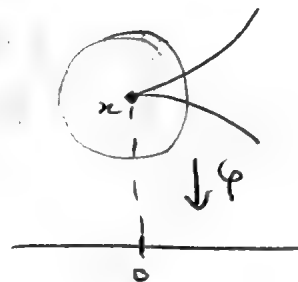
$\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ ^{morphisme d'anal} germe de morph fini en n

i) $\varphi_n = \text{position en } n$

ii) V_n voisinage de x de X / $\varphi(V_n)$ ^{est} un voisinage de $\varphi(n)$ dans \mathbb{C}^n

(noter $\{\varphi\}(V_n)$ $\{\varphi\} = \text{application sous-jacente}$)

preuve:



i) φ_n^* position

à l'ordre n

1) $\varphi(n) = 0$ on se restreint par que φ morphisme fini et $\varphi^{-1}(0) = n$
(th. morph. fini)

2) $\varphi_* \mathcal{O}_X$ est un \mathcal{O}_S -module cohérent et $\text{Supp}(\varphi_* \mathcal{O}_X) = \varphi(X)$

3) $(\varphi_* \mathcal{O}_X)_0 = \mathcal{O}_{X,n}$

$$\ker \varphi_n^* = \{g \in \mathcal{O}_n / \varphi_n^*(g) \cdot 1 = 0\}$$

$$\varphi_n^*: \mathcal{O}_{n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{X,n}$$

$$\text{Ann}(\varphi_* \mathcal{O}_X)_0 = 0$$

$$\{g \in \mathcal{O}_n / g \cdot 1 = 0\} = \{g \in \mathcal{O}_n / \varphi_n^*(g) \cdot 1 = 0\}$$

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_n \text{ mod } \varphi_n^*$$

$F = X$ -mod.

F de type fini $\{g_n \in \mathcal{O}_{X,n} / g_n F_n = 0\} = (\text{Ann}(F))_n$

$$F = \varphi_* \mathcal{O}_X$$

$$X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$$

préfaïseau
($\text{Ann } F$)(U) = $\{\Delta \in \mathcal{O}_X(U) / \Delta F(U) = 0\}$ et si F de type fini $(\text{Ann } F)_n = \text{Ann}(F_n)$

faïseau associé = $\text{Ann } F$

$\text{Ann } F$ est de type fini et \hat{m} cohérent si F l'est
 f_1, \dots, f_p gén. de $F(U)$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{O}_U \xrightarrow{\gamma} F|_U \\ \alpha \mapsto (\alpha f_1, \dots, \alpha f_p) \end{array} \right\} \Rightarrow (\text{Ann } F)|_U = \text{Ker } \gamma \text{ est cohérent d'où que } F \text{ l'est.}$$

(p40)

général : $\left. \begin{array}{l} \text{Ann } \mathcal{L}_n \mathcal{O}_X \text{ est cohérent} \\ \text{Ann } \mathcal{L}_n \mathcal{O}_X \text{ nul en } \tilde{z} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{Ann } \mathcal{L}_n \mathcal{O}_X \text{ est nul localement}} \quad (2)$

$$K = \text{Supp} \left(\frac{\mathcal{O}_X}{\text{Ann } \mathcal{L}_n \mathcal{O}_X} \right) = \text{Supp} (\mathcal{L}_n \mathcal{O}_X) \stackrel{2)}{=} \varphi(X)$$

(NB: $F = X$ -mod ~~de type fini~~ cohérent $\Rightarrow \text{Supp } F = \text{Supp } \frac{\mathcal{O}_X}{\text{Ann } F}$
 $n \in \text{Supp } \frac{\mathcal{O}_X}{\text{Ann } F} \Leftrightarrow 1, n \notin \text{Ann } F_n \Leftrightarrow F_n \neq 0 \Leftrightarrow n \in \text{Supp } F$)

et (2)

K contient un voisinage de l'origine V_n

$$\Downarrow \\ V_n \subset \text{Supp } \mathcal{L}_n \mathcal{O}_X$$

Plan

- $\varphi(X) = \text{Supp } \mathcal{L}_0 \mathcal{O}_X$
- $\frac{\mathcal{O}_X}{\text{Ann } \mathcal{L}_n \mathcal{O}_X}$ a tout support $\varphi(X)$
- $\text{Ann } \mathcal{L}_0 \mathcal{O}_X$ cohérent
- $(\text{Ann } \mathcal{L}_n \mathcal{O}_X)_0 = 0$ car \mathcal{L}_0 part \Rightarrow nul loc.

2. Position et composantes int grees

A (X, π) esp. anal. point e on sait associer $\begin{matrix} \rightarrow X_{\text{red}, \pi} \\ \rightarrow X_{i, \pi} \text{ composantes int grees} \end{matrix}$

(R) { Rappel: $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} / (f_1, \dots, f_p) \Big|_x$ localement $I = (f_1, \dots, f_p)$ $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} / \sqrt{I} \Big|_{X_{\text{red}}}$
 (NB: en fait car de genre I_x)
 $\sqrt{I} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i$ où \mathfrak{p}_i idéaux premiers minimaux
 $\mathcal{O}_{X_i} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} / \mathfrak{p}_i \Big|_{X_i}$ d'où: $\begin{matrix} \mathcal{O}_{X_{\text{red}}} \rightarrow \mathcal{O}_{X_i} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ X \leftarrow X_i \end{matrix}$ (x))

2.1 Prop: $\varphi_x: X_x \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une position en $x \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \ \mathfrak{p}_{i, \pi} \text{ est fini en } x \\ \exists i \ \mathfrak{p}_{i, \pi} \text{ position en } x \end{cases}$

ou l'on note $\varphi_{i, \pi}: X_{i, \pi} \rightarrow \mathbb{C}^n$

preuve: φ_x fini en $x \Leftrightarrow \forall i \ \varphi_{i, \pi}$ fini en x (cf caract. topologique de la finitude: x isolé dans $\varphi^{-1}(s)$)
 $s = \varphi(x)$

Il suffit alors de montrer que:

φ_x^* injectif $\Leftrightarrow \exists i \ \varphi_{i, \pi}^*$ injectif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} & \xrightarrow{\varphi_x^*} & \mathcal{O}_x \\ \pi \varphi_{i, \pi}^* \searrow & & \downarrow h_x \\ \pi \mathcal{O}_{X_i} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{O}_{X_{\text{red}}} \end{array}$$

$\exists i \ \varphi_{i, \pi}^*$ injectif $\Leftrightarrow \prod_i \varphi_{i, \pi}^*$ injectif

$\mathcal{O}_{X_{\text{red}}} \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_{X_{i, \pi}}$ est injectif car $\sqrt{I_x} = \bigcap_i \mathfrak{p}_{i, \pi}$ (cf (*) et déf de $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}} \rightarrow \mathcal{O}_{X_i}$)

Il faut donc montrer que:

$\varphi_x^* \text{ injectif} \Leftrightarrow h_x \text{ injectif}$

\Rightarrow ~~h_x~~ h_x injectif $\Rightarrow \varphi_x^*$ injectif

* (⇐) Si h_n non injectif, $\begin{cases} g \neq 0 \\ h_n(g) = 0 \end{cases}$ et $\ell_n^*(g) \in N = \sqrt{I_n}$ donc $\ell_n^*(g^k) = 0$ ($\forall k$)
 et l'algèbre \mathcal{O}_n est intègre, donc $g^k \neq 0$, donc ℓ_n^* non injectif.

CQFD

X espace analytique et X_n intègre

(penser à \mathbb{C}^n)

2.2 lemme: Soit X un esp. anal. dont les anneaux locaux sont intègres.
 Soit F un X -module cohérent tel que F_n soit un $\mathcal{O}_{X,n}$ -module
~~libre~~ sans torsion.

Alors: 1) \exists vois. X' de x et un morphisme injectif de $F|_{X'}$ dans
 un $\mathcal{O}_{X',n}$ -module libre de type fini
 2) $\forall y \in X'$ F_y est un $\mathcal{O}_{X',n}$ -module sans torsion

preuve

$$2) \Rightarrow 1) \quad b \mapsto (a_1, \dots, a_p) \\ F|_{X'} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X',n}^p$$

$$\forall y \in X' \quad g \in \mathcal{O}_{X',y} \quad b \in F_y$$

$$\forall g \in \mathcal{O}_{X',y} \quad g \neq 0 \quad gb = 0 \Rightarrow (ga_1, \dots, ga_p) = 0 \Rightarrow a_i = 0 \text{ car } \mathcal{O}_{X',y} \Rightarrow b = 0.$$

1) $K =$ corps des fractions de $\mathcal{O}_{X,n}$

$$\left. \begin{aligned} V &= F_n \otimes_{\mathcal{O}_{X,n}} K \\ V &= S^{-1} F_n \doteq S \times F_n / \sim \end{aligned} \right\} \begin{aligned} b \otimes \frac{a}{s} \\ \downarrow \\ \frac{ab}{s} \end{aligned} \quad \left(\text{par problème universel} \right)$$

Comme $F_n = \mathcal{O}_{X,n}$ -module sans torsion (ie $\forall s \in S = \mathcal{O}_{X,n} \setminus \{0\} \quad \forall b \in F_n \quad sb = 0 \Rightarrow b = 0$)
 on peut définir:

$$F_n \xrightarrow{\tilde{\iota}} V = F_n \otimes_{\mathcal{O}_{X,n}} K = K\text{-espace-vectriel de dim finie}$$

(car $F_n = \mathcal{O}_{X,n}$ -mod. de dim finie et

$$F_n \otimes_{\mathcal{O}_{X,n}} K = K\text{-module} \quad \left(\underbrace{\quad}_{\text{cay}} \right)$$

(f_1, \dots, f_p) syst. générateur de F_n

$(e_1, \dots, e_q) = K$ -base de V

$$\tilde{\iota}(f_i) \in V \quad \tilde{\iota}(f_i) = \underset{\text{abus}}{f_i} = \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} e_j$$

q.e.d.

quitte à diviser les e_j par un grand dénominateur commun on peut supposer que $\alpha_i^j \in \mathcal{O}_{X,n}$

L'application:

$$F_{X,n} \rightarrow \mathcal{O}_{X,n}$$

$$b_{1,n} \mapsto (\alpha_{1,n}^1, \dots, \alpha_{1,n}^q) \quad \text{Katz}$$

$$b_{p,n} \mapsto (\alpha_{p,n}^1, \dots, \alpha_{p,n}^q)$$

définir une morphisme de $\mathcal{O}_{X,n}$ -module de $F_{X,n} \rightarrow \mathcal{O}_{X,n}$ car si $\sum \lambda_i b_{i,n} = 0$ est une relation entre les $b_{i,n}$, on a $\sum \lambda_i \tilde{\tau}(b_{i,n}) = 0$

$$\begin{array}{c} \text{(cf: } 0 = \sum \lambda_i b_{i,n} \rightarrow \sum \lambda_i (\alpha_{i,n}^1, \dots, \alpha_{i,n}^q) \in \mathcal{O}_{X,n} \xrightarrow{\text{car } F_{X,n} \rightarrow \mathcal{O}_{X,n}} V \\ \searrow \tau \quad \quad \quad \downarrow \cong \quad \quad \quad \downarrow \\ 0 = \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_{i,n}^j e_j \in K^q \\ \left. \begin{array}{l} \sum \lambda_i \alpha_{i,n}^1 = 0 \\ \vdots \\ \sum \lambda_i \alpha_{i,n}^q = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

De plus $F_{X,n} \rightarrow \mathcal{O}_{X,n}^q$ est injective

Rappel: $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n)$ est un isomorphisme de \mathcal{O}_n -modules dès que \mathcal{G} est \mathcal{O} -cohérent. (R')

$$(\text{et } \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U))$$

On a aussi: \mathcal{F} et \mathcal{G} cohérents $\Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ cohérent.

grâce à (R')

On a, ici: $\bigvee b_n \in \text{Hom}(\mathcal{F}_n, \mathcal{O}_n^p)$ injectif. C'est le germe d'une application β définie sur un petit voisinage U , $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{O}|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}^p|_U)$

$$\beta: \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{O}^p|_U$$

$(\text{Ker } \beta)_n = \text{Ker } b_n = 0 \Rightarrow \text{Ker } \beta = 0$ localement, donc β est injective
Ker β cohérent localement

CQFD

2.3 Proposition: X espace analytique

$(X, \pi) \xrightarrow{f} (\mathbb{C}^n, 0)$ morphisme d'espaces pointés

X_n intègre

f position en x

Alors $\exists V_x$ voisinage de $x \quad \forall y \in V_x \quad f = \text{position en } y$.

preuve: $f_* \mathcal{O}_X$

$\exists X'$ voisinage de x dans X
 $f|_{X'}$ est un morphisme fini

d'après le Th. des morphismes finis



$f_* \mathcal{O}_X$ est un \mathcal{O}_S -module cohérent et $S = \mathbb{C}^n$

$(f_* \mathcal{O}_X)_0 = \mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}_{X,n}$ est sans torsion sur $\mathcal{O}_{S,0}$. En effet:

$$hg \doteq f_n^*(h) \cdot g$$

$$h \in \mathcal{O}_{S,0} \quad g \in \mathcal{O}_{X,n}$$

$$h \neq 0 \quad f_n^*(h) \neq 0 \text{ car } f_n^* = \text{position}$$

(définition déjà donnée)

donc $f_n^*(h)g = 0 \Rightarrow g = 0$ car X_n est intègre ($\doteq \mathcal{O}_{X,n}$ intègre).

donc lemme 2.2, 2):

$f_* \mathcal{O}_X$ est sans torsion localement sur \mathcal{O}_S

$$y \in f^{-1}(0)$$

$$\mathcal{O}_{X,y} \hookrightarrow f_*(\mathcal{O}_{X,y}) = \bigoplus_{j \in f^{-1}(0)} \mathcal{O}_{X,j} \text{ sans torsion sur } \mathcal{O}_{S,0}$$

\Downarrow
 donc f_y^* injectif

~~(si $h \neq 0$ et $f_y^*(h) = 0$, alors $f_y^*(h) \cdot p = 0$ autrement $f_y^*(h) \cdot (p_j)_j = 0$~~

(preuve:

Si $h \neq 0$ et $f_y^*(h) = 0$, $h(\mathcal{O}_{X,y} \oplus 0 \dots \oplus 0) = (f_y^*h) \mathcal{O}_{X,y} \oplus \dots \oplus 0 = 0$ car $\mathcal{O}_{X,y}$ intègre. $f_y^*(h)p_j = 0$

d'où $h\mathcal{O}_{X,y} = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$ a de la torsion, ce qui est absurde car $\mathcal{O}_{X,y}$ intègre

(q.f.d)

$$h(\mathcal{O}_{X,y} \oplus 0 \dots \oplus 0) = 0 \text{ car } \mathcal{O}_{X,y} \text{ intègre}$$

$$\Downarrow$$

$$(f_y^*h) \mathcal{O}_{X,y} \oplus \dots \oplus 0$$

2.4 Corollaire

$\{ \beta \text{ position } \}_{X_n \text{ int\`egre}} \Rightarrow \exists X' \text{ vois. de } n \quad \{ \beta \}_{X'} \text{ ouverte}$

preuve : D'après 2.3, β_n est une position eng. pour y appartenant à un voisinage V de n . D'après la prop. 1.4 (caractérisation topologique d'une position), $\{ \beta \}_{X'}$ est ouverte.

Q.F.D.

2. Position d'un germe int\`egre :

2.5 Théorème de l'élément primitif :

B anneau int\`egre

$A \subset B$ sous-anneau

$B = A$ -module de type fini

$K =$ corps de fraction de A de caractéristique 0 (ACK)

i) $\exists \beta \in B \quad \exists \alpha \in A \setminus \{0\} \quad \alpha \cdot B \subset A[\beta]$

ii) $\exists h \in A[T]$ monique irréductible dans $K[T]$, tel que $h(\beta) = 0$

iii) $A[T]_h \cong A[\beta]$

2.5.1 NB : $B = A$ -mod de type fini

$b \in B \quad (e_1, \dots, e_p) =$ syst. générateur de B

$$b \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix} \Rightarrow \det(b \text{Id} - A) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det(b \text{Id} - A) \cdot B = 0$$

$$\updownarrow \begin{matrix} \text{multiplier} \\ \text{par la transposée} \end{matrix} \quad (b \text{Id} - A) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix} = 0 \quad \text{de la comatrice}$$

$$\boxed{h(b) = \det(b \text{Id} - A) = 0}$$

les points ii) et iii) sont donc faciles.

Seul le pt i) pose problème

2.5.2 exemple : $X \downarrow \varphi \quad \mathcal{O}_{X,n}$ est un $\mathcal{O}_{S, \varphi(n)}$ -module de type fini

$$\forall f \in \mathcal{O}_{X,n} \quad f^n + \varphi^*(g_1) \cdot f^{n-1} + \dots + \varphi^*(g_n) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}_{X,n}$$

avec :

$$\begin{aligned} B &= \mathcal{O}_{X,n} \\ A &= \varphi^* \mathcal{O}_{S, \varphi(n)} \end{aligned}$$

2.6 Position d'un germe intègre : Théoreme

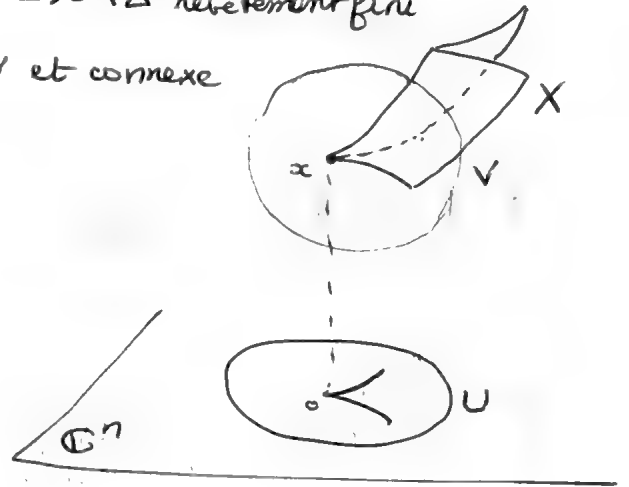
(X, x) esp. anal. pointé

$\mathcal{O}_{X, x}$ intègre

$\varphi: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ position en x

Hypothèses : $\exists U$ voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n $\exists V$ vois. de x dans X
 $V \Delta$ sous-ensemble analytique de U , fermé, d'intérieur vide tel
 que :

- 1) $\varphi|_V : V \rightarrow U$ morphisme fini avec $\varphi^{-1}(0) = x$
- 2) $\varphi|_{\varphi^{-1}(U \setminus \Delta) \cap V} : \varphi^{-1}(U \setminus \Delta) \cap V \rightarrow U \setminus \Delta$ revêtement fini
- 3) $X' = \varphi^{-1}(U \setminus \Delta) \cap V$ dense dans V et connexe



Rappel
 Proposition :

$\varphi: X \rightarrow Y$

φ isomorphisme local en $x \iff \varphi_x^\#$ isomorphisme

2.6.1 Lemme : $\exists U, V$ voisinages de 0 et x vérifiant le i) du Théoreme

$\exists h \in \mathcal{O}_n(U) \setminus \mathbb{Z}$ monique

K = corps des fractions de $\mathcal{O}_{n,0}$

h_0 = image de h dans $K[\mathbb{Z}]$, irréductible

$\exists g \in \mathcal{O}_n(U)$ dont l'image $g_0 \in \mathcal{O}_{n,0}$ est $\neq 0$

et tel que $Y = h^{-1}(0) \subset U \times \mathbb{C}$

$\downarrow \pi$
 U

$\Gamma = g^{-1}(0)$

$\exists \mu$ morphisme tel que

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mu} & Y \subset U \times \mathbb{C} \\ \varphi \searrow & & \swarrow \pi \\ & U & \end{array}$$

et tel que μ induise un isomorphisme en dehors de $U \setminus \Gamma$

(Ce lemme ramène la situation de 2.6 de V sur Y)

preuve: φ_x position, donc:

$$\varphi_x^*: A = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, 0} \longrightarrow B = \mathcal{O}_{X, x} \text{ injectif}$$

$B = A$ -module de type fini (car \mathcal{P} est fini). On peut voir A comme un sous-anneau de B , et B est intègre. Le théorème de l'élément primitif 2.5 donne:

$$\exists \beta \in \mathcal{O}_{X, x} \quad \exists h \in \mathcal{O}_{n, 0}[Z] \quad \exists \alpha \in \mathcal{O}_{n, 0} \text{ tels que:}$$

monique irréductible dans $K[Z]$

$$\alpha \cdot \mathcal{O}_{X, x} \subset \mathcal{O}_{n, 0}[h_0]$$

$$h_0(\beta) = 0$$

$$\mathcal{O}_{n, 0}[Z] /_{h_0} \simeq \mathcal{O}_{n, 0}[\beta]$$

Ainsi $\exists h \in \mathcal{O}_n(U)[Z]$ représentant h_0

$\exists g \in \mathcal{O}_n(U)$ représentant α

$\exists b \in \mathcal{O}_X(V)$ représentant β (il servira à définir μ)

Soit $Y = h^{-1}(0) =$ sous-espace analytique de $U \times \mathbb{C}$

$$X \supset V \xrightarrow{(\varphi, b)} Y \subset U \times \mathbb{C}$$

car $b \in \mathcal{O}_X(V)$ définit (bijectivement) un morphisme de V dans \mathbb{C} .

on arrive dans Y car $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}} /_{\mathcal{I}_h}$ est l'algèbre de Y

$((\varphi, b)$ passe au quotient car $(\varphi, b)^* \cdot h = 0$, cf lemme p)

On pose $\mu = (\varphi, b)$:

$$\begin{array}{ccc} X \supset V & \xrightarrow{\mu = (\varphi, b)} & Y \subset U \times \mathbb{C} \\ \varphi \searrow & & \swarrow \pi \\ & 0 \ni U & \end{array} \quad \begin{array}{c} \cap \\ (0, b(n)) \\ 0 \end{array} \leftarrow \text{pas évident}$$

Affirmation:

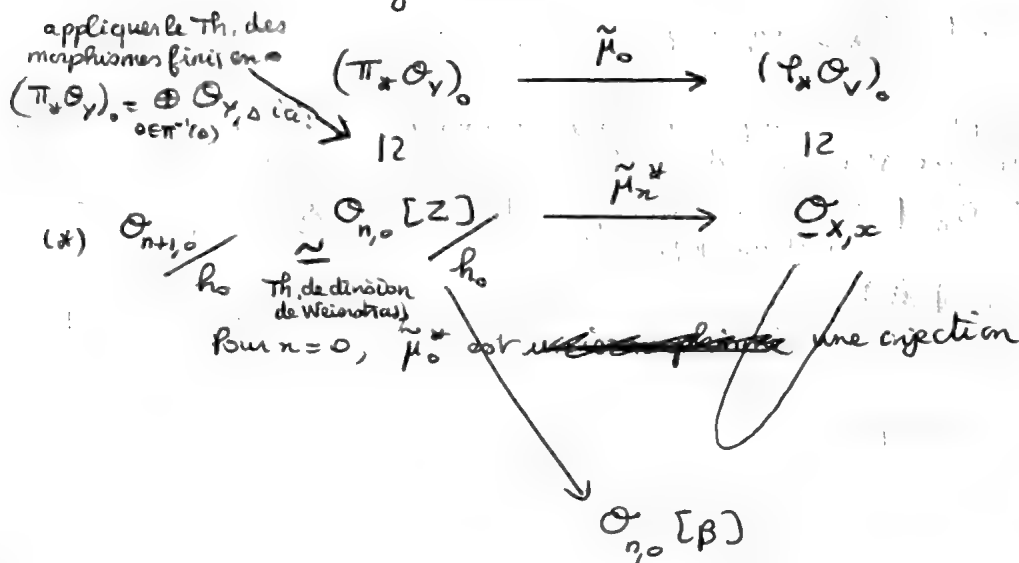
~~Il~~ μ est un isomorphisme au dessus de $U \setminus T$.

π est un morphisme fini (car $\pi^{-1}(0)$ fait de pts isolés, π étant analytique), donc π est fini localement. Il suffit de montrer que:

$\tilde{\mu} : \pi_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_V$ est un isomorphisme au dessus de $U \setminus T$ (admis. Frisch

o'est planté et K.Saito a dit que c'était duu!)

On a le diagramme :



$\tilde{\mu}_n$ = morphisme entre 2 anneaux locaux, donc définit une injection localement.

Surjectivité : $U \cup V$

$$g. (\rho_* \mathcal{O}_V)_\circ \subset \tilde{\mu}_0 (\pi_* \mathcal{O}_Y)_\circ$$

$$\varphi_n^*(\alpha). \mathcal{O}_{X, x} \subset \mu_n^* \mathcal{O}_{Y, \alpha}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{X, x} & \xleftarrow{\mu_n^*} & \mathcal{O}_{Y, \alpha} \\
 \cup & & \downarrow \text{12} \\
 \mathcal{O}_{n, \circ} [\beta] & \simeq & \mathcal{O}_{n, \circ} [Z] / h_0
 \end{array}$$

CPFD

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \mathcal{O}_{n+1, \circ} &= \mathcal{O}_{n, \circ} [Z] \quad \text{et } h_0 \text{ monique en } z \text{ donc régulier en } z \text{ (i.e. } h_0(\circ, z) \neq 0) \\
 \forall f \in \mathcal{O}_{n, \circ} [Z] \quad f &= u h_0 + \underbrace{a_0(z) + \dots + a_{d-1}(z)}_{\in \mathcal{O}_{n, \circ} [Z]} z^{d-1} \quad a_i(\circ) = 0
 \end{aligned}$$

Ce Théorème de Weierstr. de division donne l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_{n+1, \circ} / h_0 \simeq \mathcal{O}_{n, \circ} [Z] / h_0$$

preuve du Th 2.6.

U connexe

δ = discriminant du polynôme $h \in \mathcal{O}_n(U)$ $\delta \in \mathcal{O}_n(U)$

$\Delta' = \delta^{-1}(0)$ est un sous-espace analytique fermé de U d'intérieur vide
(si on $\delta \equiv 0$, $\text{Res}(h_0, h'_0) = 0 \Rightarrow h_0$ et h'_0 ne seraient pas premiers entre eux dans $K[[Z]]$ comme l'indique l'hypothèse h_0 est irréductible)

$\Delta = \Gamma \cup \Delta' = (\gamma \delta)^{-1}(0)$ est fermé d'intérieur vide (cf Hartogs Prop. II)

$V \rightarrow Y_0$ irréductible

position φ position π

donc φ et π ouvertes (cf 2.4 p 92)

$$\begin{cases} Y' = \pi^{-1}(Y \setminus \Delta) \\ p = \deg h \end{cases}$$

mémoire DEA [résultat classique : au dehors du discriminant Δ , $\pi: Y' \rightarrow Y \setminus \Delta \cap U$ est un revêtement à p feuillets. Ainsi

$\varphi: X' = V \cap \varphi^{-1}(U \setminus \Delta) \rightarrow U \setminus \Delta$ est un revêtement à p feuillets de $U \setminus \Delta$

(Hartogs) $U \setminus \Delta$ dense dans U } $\Rightarrow X'$ dense
 $V \rightarrow U$ ouverte

Y' connexe (non montré) $\Rightarrow X'$ connexe

CQFD

3. Dimension d'un espace analytique

(X, x) $\dim_x X = \inf_{m \in \mathbb{N}} \{ m / \exists \varphi: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0) \text{ morphisme fini} \} \in \mathbb{N}$

L'application $x \mapsto \dim_x X$ est semi-continue supérieurement,
ie :

$$\exists V_x \forall y \in V_x \dim_y X_y \leq \dim_x X \quad (1)$$

L'ensemble $\{y \in X / \varphi_y \text{ est fini}\}$ est ouvert $\frac{1}{2}$ d'au (1)

NB : X de dimension pure $\Rightarrow \dim_x X = \text{constante}$



3.1 Proposition: $\begin{cases} X \text{ espace analytique, } x \in X \\ d = \dim_x X \\ X_x \text{ int\`egre} \end{cases}$

$\exists V$ voisinage de x $\exists V' \subset V$, V' ouvert dense, $\forall y \in V'$ (X, y) est lisse de dimension d (comme vari\'et\'e analytique)

3.2 Corollaire: Si X = vari\'et\'e analytique, $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ est int\`egre

et $\dim_x X = d \quad \forall x \in X$ o\`u d = dimension de la vari\'et\'e X .

Ainsi, dans ce cas, $\dim_x X$ n'a qu'un sens (que X soit consid\'er\'e comme vari\'et\'e ana. ou comme espace ana).

preuve: (X, x)

$\downarrow \varphi$ morphisme fini
 \mathbb{C}^d

Pour hypoth\`ese, φ est une position en x (car φ n'est pas "raffinable" sur \mathbb{C}^m et $m < d$, prop 1.3). Le th\'eor\`eme de description locale 2.6 d'un germe int\`egre donne $V' = \varphi^{-1}(U \setminus \Delta) \cap V$

(NB: dans 2.6, le remarque 2) ~~donc~~ montre que V' est une vari\'et\'e anal. de dimension la dim. de la base $U \setminus \Delta \subset \mathbb{C}^d$, donc d .)

CPFD

3.3 Proposition: $(X, x) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{C}^m, 0)$

Alors:

φ position $\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \text{ finie en } x \\ \dim_x X = m \end{cases}$

preuve:

(\Leftarrow) trivial, car φ n'est pas raffnable sur \mathbb{C}^m (cf 3.1 preuve, m\^eme raisonnement)

(\Rightarrow) On a $m \geq \dim_x X$

De plus:

$\begin{array}{ccc} X'_x & \rightarrow & X_x \\ & \searrow \varphi' & \downarrow \varphi \\ & & \mathbb{C}^m \end{array}$

$\begin{cases} X'_x \text{ composante int\`egre de } X_x \\ \varphi \text{ induit une position } \varphi' \text{ (cf. 2.1)} \end{cases}$

d'o\`u, en appliquant le th. de description locale 2.6 \`a φ' :

$\exists V'$ dense dans X' $\forall y \in V'$ $\dim_y V' = m$ V' lisse en y

donc $\dim_x X' = m$ comme espace analytique (d'apr\`es la prop 3.1)

On a vu en 2.1 que $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}^k$ fini $\Rightarrow \varphi': X' \rightarrow \mathbb{C}^k$ fini, donc

$$\dim_n X' \leq \dim_n X$$

pour toute composante intégrale X' de X .

Finalement, on a montré que l'existence de X' composante intégrale de X telle que :

$$m = \dim_n X' \leq \dim_n X \leq m \Rightarrow \dim_n X = m$$

CQFD

NB: 3.3 implique que toutes les positions φ de X en n ont même but \mathbb{C}^m .

|| 3.4 Corollaire :

$$\dim_n X = \sup_{\substack{X' \text{ comp. intégrale} \\ \text{de } X_x}} \dim_n X'$$

Toutes les composantes intégrales de X ont une dimension \leq à la dimension de X et il existe une et une seule composante intégrale X' telle que $\dim_n X' = \dim_n X$ (cf preuve de 3.3).

CQFD

(Le théorème des zéros)

3.5 Lemme : X espace analytique, $x \in X$

Hyp: X_n intégrale. $R \in \mathcal{O}_x(X)$ $\{h_i\}$ définie par $\{h_i\}_{(n)} = "h_i/m_n"$ (cf)

Affus :

$\{h_i\}_n =$ germe de $\{h_i\}$ en n .

(cf 2.6)

$\{h_i\}: X \rightarrow \mathbb{C}^n$
 $x \mapsto \frac{h_i}{m_n}$
classe dans $\mathcal{O}_{X,n}/m_n = \mathbb{C}$

$$\{h_i\}_{(n)} = 0 \Rightarrow h_n = 0$$

preuve :

exemple $X = \frac{\mathbb{C}^2}{(y^2 - x^3)} \Big|_{y^2 - x^3 = 0} \mathcal{O}_{(0,0)}$ intégrale

$$\beta(n, y) \Big|_{y^2 - x^3 = 0} = 0 \Rightarrow \beta \in (y^2 - x^3) \text{ c'est le th. des zéros car } \sqrt{(y^2 - x^3)} \in (y^2 - x^3)$$

1) C'est évident si $n \in X_{\text{reg}}$ car $X = \mathbb{C}^n$ au voisinage : $X|_V \simeq \mathbb{C}^n|_V$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}{I=0} \text{ donc } \exists \Omega' \subset \Omega \text{ } 0 \leq n' \leq n \text{ } h(n_1, \dots, n_n) = 0 \text{ sur } \Omega' \text{ donc}$$

$$\{h_i\}_{(n)} = 0.$$

2) Si $h_n \neq 0$, $X \xrightarrow{h} \mathcal{O}_X$ "multiplication par h " est une section globale, injective en $x^{(n)}$, donc $\mathcal{O}_{X,n} \neq 0$, donc au voisinage (cf cohérence de \mathcal{O}_X).

h_y est donc injective pour $y \in V'$ où y régulier et V' ouvert dense⁽⁴⁾, donc (cf 1))

$$\{h_i\}_{(n)} \neq 0.$$

(4) cf description locale 2.6) (pour X tel que X_n intégrale)

Alors : $\left. \begin{array}{l} x \in \bar{V}' \\ \{f_j\}_n \neq 0 \\ \forall y \in V' \end{array} \right\} \Rightarrow \{f_j\}(x) \neq 0$

3.6 Théorème des zéros.

X espace analytique

$x \in X \quad f \in \mathcal{O}_X(X)$

i) $\{f\}_n = 0$ (ie l'application sous-jacente à f est nulle au voisinage de X)

\Leftrightarrow

ii) f_n nilpotent dans $\mathcal{O}_{X,n}$

ii) \Rightarrow i) clair $\mathcal{O}_{X,n} = \mathcal{O}_n / \mathcal{I}_n \Big|_X \quad f_n \in \sqrt{\mathcal{I}_n} \Rightarrow f_n^k \in \mathcal{I}_n$

$\left. \begin{array}{l} \{f\}_n = g(n) \\ \text{ou } f = g \end{array} \right\}$

or $f^k = g^k \in \mathcal{I}_n$ comme $x \in X \quad g^k(n) = 0 \Rightarrow g(n) = 0 \Rightarrow \{g\}_n = 0$

ex: $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} / \mathcal{I} \Big|_X \quad X = \text{les zéros de } \mathcal{I}$
 $(x \in X \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{I} \quad f(x) = 0)$

Soit $g_n \in \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} / \mathcal{I} \right)_n$ nilpotent $g_n^k \in \mathcal{I}_n \Leftrightarrow g^k(n) = 0$
 donc $g(n) = 0$
 donc $\{g\}_n = 0$

car $\{g\} : X \rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto g(x)$

(NB: $\dot{g}_n = f_n$ donc g analytique
 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, n} / \mathcal{I}_n = \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} / \mathcal{I} \right)_n$ sur un voisinage de n)

$y^2 - x^3 = 0$
 $\{g\}$
 X

i) \Rightarrow ii) P_i = idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,n} (= \mathcal{O}_{C^n/I})$

$$\sqrt{\mathcal{O}_{X,n}} = \bigcap P_{i,n}$$

$X_{i,n}$ = composantes intégrales = définies par $P_{i,n}$ dans $\mathcal{O}_{X,n}$

Rappel : $X = \mathcal{O}_{C^n/I} / \sqrt{I}$ $\frac{\pm C \sqrt{I}}{\sqrt{I}} \hookrightarrow \frac{\mathcal{O}_{C^n}}{\sqrt{I}} = X$
 P_i id minimaux premiers de I
 $\sqrt{I} = \bigcap P_i$
 $X_i = \frac{\mathcal{O}_{C^n}}{P_i} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{C^n}}{\sqrt{I}} = X_{red}$

$$\{f_i\}_n = 0 \quad \forall y \in Y_n \cap X \quad \{f_i\}(y) = 0 \quad \text{ou} \quad \{f_i\} : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{f_i\} : X_i = \text{zéros de } P_i \longrightarrow \mathbb{C} \\ \{f_i\}_n = 0 \end{array} \right. \quad (\text{f_i induit par } f)$$

\swarrow lemme 3.5

$$f_{i,n} = 0 \Rightarrow f \in P_i, \quad \forall i \text{ donc } f \in \bigcap P_i = \sqrt{\mathcal{O}_{X,n}}$$

CQFD

ie f_n nilpotent dans $\mathcal{O}_{X,n}$

Paranthèse :

① $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$ suite exacte de faisceaux \Leftrightarrow suite exacte fibre à fibre. Alors : a)

$$\forall f \in \mathcal{H}(U) \quad \exists \tilde{f} \in \mathcal{H}(U) \quad \tilde{f}_n = f_n$$

$$\forall f \in \mathcal{H}(U) \quad x \in U \quad \exists U' \quad x \in U' \subset U \quad \exists g \in \mathcal{G}(U') / \psi(g) = f|_{U'}$$

② exercice : si \mathcal{F} est flasque, et $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$ exacte,
 $\{ \forall f \in \mathcal{H}(U) \quad \exists g \in \mathcal{G}(U) \quad \psi(g) = f \}$ (ie $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$)
 (ie $R^1 \Gamma(U, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall \mathcal{F}$ flasque et U ouvert)

preuve de ② : $x \in U \quad A = \{ (x, U) \mid U \text{ voisinage de } x \mid \exists g_U \in \mathcal{G}(U) \quad \psi(g_U) = f \} \neq \emptyset$
 est un ensemble ordonné inductif. Soit (x, U') un élément maximal, montrons que $U' = U$: Soit $y \in U \setminus U' : (y, V) \quad V \text{ voisinage de } y \quad h \in \Gamma(V, \mathcal{G}) \text{ et } \psi(h) = f|_V$

Sur $U' \cap V : \psi(h)|_{U' \cap V} = \psi(g_{U'})|_{U' \cap V} \Rightarrow h - g_{U'}|_{U' \cap V} \in \ker \psi = 0$
 donc (fonction section exact à gauche) : $h - g_{U'} = \varphi(\tilde{h})$ où $\tilde{h} \in \Gamma(U' \cap V, \mathcal{F})$
 \mathcal{F} flasque \Rightarrow on prolonge \tilde{h} à U . Soit \tilde{h} le prolongé

Soit la section qui vaut $\begin{cases} g_{\mathcal{U}'} \text{ sur } \mathcal{U}' \\ h = \varphi(\tilde{\chi})|_V \end{cases}$. Elles coïncident sur $\mathcal{U}' \cap V$ donc

définissent une section s sur $\mathcal{U}' \cup V$ et $\varphi(s) = ft$, ce qui est absurde.

Donc $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$.

□

③ Corollaire de ② : Si $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I$, f section de \mathcal{O}_X sur X s'écrit, pour $x \in X$,

$f_x = \frac{g}{g_x}$ où $g =$ section de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ sur un voisinage de x (ie g holomorphe sur un voisinage de x)

On applique ① avec la suite exacte $0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I \rightarrow 0$